

FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

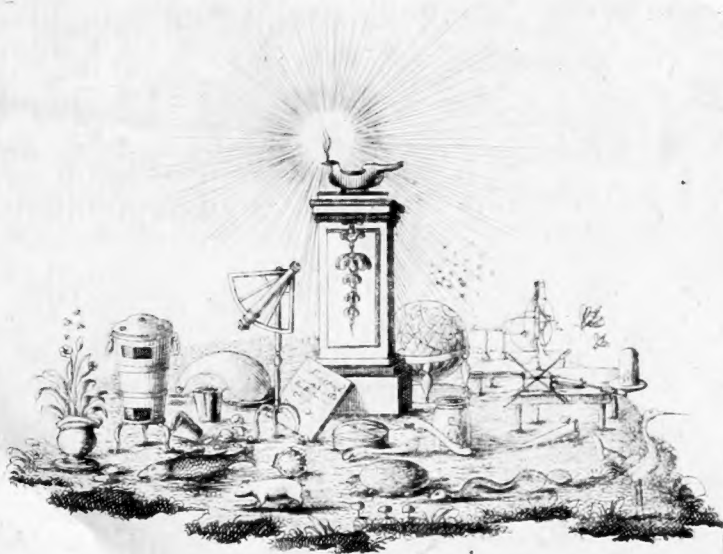
LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY



ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

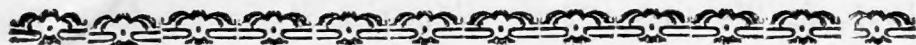
pro Anno MDCCLXXVIII.

PARS PRIOR.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXX.

16.70286 April 28



T A B L E.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXVIII. Janvier — Juin.

GÉOGRAPHIE

<i>Propectus d'une Description générale topographique & physique de l'Empire de Russie, projetée par l'Académie Impériale des Sciences de St. Petersbourg</i>	- - - -	Page 3.
---	---------	---------

EXTRAIT <i>d'une Lettre de Mr. Hähn Sur-Intendant des Mines écrite à Mr. le Professeur Pallas</i>		38.
--	--	-----

ANATOMIE

<i>Notice touchant un monstre bisforme, dont les deux corps sont réunis par derriere</i>	- -	41.
--	-----	-----

MÉTÉOROLOGIE

<i>Observation d'une Aurore Australe</i>	- -	45.
<i>Hyver de 1777 à 1778</i>	- - - -	46.
):(2	Etat

<i>Etat du Barometre pour chaque mois des années</i>	Pag.
1772 — 1777 - - -	50.
<i>Etat du Thermometre pour chaque mois des années</i>	
1772 — 1777 - - -	55.
<i>Etat de l'Atmosphere pour chaque mois des années</i>	
1772 — 1777 - - -	61.
MORTS - - -	66.
OUVRAGES, Machines & Inventions présentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du premier semestre de l'Année 1778 -	67.

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCCLXXVIII. Pars prior.

cum tabulis XIII. aeri incis.

MATHEMATICA

Pag.

LEONH. EVLER. <i>De corporibus regularibus per doctrinam sphaericam determinatis; ubi simul nova methodus, globos siue coelestes siue ter- restres charta obducendi, traditur</i> - -	3.
— — <i>Dilucidationes super methodo elegantissima, qua illustris de la Grange usus est in inte- granda aequatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$</i> -	20.

ANDR.

ANDR. LEXELL. <i>De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipseos et hyperbolae</i> - - - - -	Pag. 58.
LEONH. EVLER. <i>De infinitis infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum</i> - - - - -	102.
PHYSICO-MATHEMATICA	
LEONH. EVLER. <i>Determinatio onerum, quae columnae gestare valent</i> - - - - -	121.
— — <i>Examen insignis paradoxii in theoria columnarum occurrentis</i> - - - - -	146.
— — <i>De altitudine columnarum sub proprio pondere corruentium</i> - - - - -	163.
NICOL. FVSS. <i>Varia problemata circa statum aequilibril trahium compactilium oneratarum, earumque vires et pressionem contra anterides</i> - - - - -	194.
PHYSICA	
I. T. KOELREVTER. <i>Lycia hybrida</i> - - - - -	219.
I. G. GEORGI. <i>De conferuae natura, disquisitio chemica</i> - - - - -	225.
C. F. WOLF. <i>Descriptio vesiculae felleae tigridis, eiusque cum leonina et humana comparatio</i> - - - - -	234.

IOANN. LEPECHIN.	<i>Tres oniscorum species descriptae</i>	- - - - -	Pag. 247.
A. I. GÜLDENSTAEDT.	<i>Antilopes subgutturosaee descriptio</i>	- - - - -	251.
— —	<i>Antilopes subgutturosaee anatomia</i>	- -	263.
ASTRONOMICA			
J. ANDRÉ MALLET.	<i>Observations astronomiques faites à Genève</i>	- - - - -	277.
LEONH. EULER.	<i>Réflexions sur les inégalités dans le mouvement de la Terre causées par l'action de Venus: avec une Table des corrections du Lieu de la Terre</i>	- - -	297.
LEONH. EVLER.	<i>Investigatio perturbationum, quae in motu terrae ab actione Veneris producuntur: cum tabula perturbationum istarum</i>		308.
ANDR. LEXELL.	<i>Uteriores disquisitiones de tempore periodico cometae anno 1770 observati</i>		317.
ANDR. LEXEIL.	<i>Supplementum ad dissertationes novis commentariis insertas, de eclipsibus solaribus annis 1769 et 1773 observatis, ut et occultationibus fixarum a Luna</i>	- -	353.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

Histoire de 1778. P. L

a


Math 2.14

Chapter 2.14: The Integral

1.1

2.14.1 The Integral





HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXVIII.

Janvier — Juin.

GÉOGRAPHIE.

Prospectus d'une Description générale topographique
& physique de l'Empire de Russie, projet-
tée par l'Académie Impériale des Sciences de
St. Pétersbourg. (*)

Le Comité nommé par S. E. Mr. le Directeur de
l'Académie, pour composer une Géographie topogra-
phique et physique de la Russie a débuté par la publica-
tion d'un Prospectus détaillé, qui se partage en cinq par-
ties principales.

a 2

La

(*) Traduit du Russe.

La I^{re} s'occupe de la Géographie générale de l'Empire:

la II^{de} en donne une Histoire générale:

la III^{me} en comprend l'État politique:

la IV^{me} la Géographie particulière, & enfin

la V^{me} une description physique du même Empire.

Première Partie principale,

c'est à dire

Géographie générale de l'Empire.

Elle se divise en huit Sections.

Section première.

Limites de l'Empire.

- 1) Du côté de l'Europe, l'Océan septentrional & les deux golfes qu'il forme, la mer blanche & la mer baltique, la Suède, la Pologne, & la Turquie européenne.
- 2) En Asie vers le Midi, la mer noire & celle d'Asov, la Crimée indépendante, le Caucase, la mer Caspienne, le désert des Kirgises borné par le Gouvernement d'Orenbourg, la Mongolie & la Daurie, qui dépendent de la Chine.
- 3) vers l'Orient la partie septentrionale de l'Océan oriental, le détroit entre l'Asie & l'Amérique, & enfin
- 4) vers le Nord, tout l'Océan septentrional, ou la mer glaciale.

Section

*Section seconde.***Position de l'Empire sur le globe.**

Son étendue par climats & degrés: sa dimension en versets carrées d'après le calcul le plus juste auquel on puisse approcher.

Section troisieme.

Orographie générale de l'Empire: c'est à dire, Description de ses montagnes, se bornant à leur situation, pente, distribution, correspondance, & hauteur proportionnée, sans avoir égard à leur exploitation.

- 1) le Caucase en général, particulièrement cette partie qui en est située en Russie, & ses sommets du côté du nord.
- 2) les monts Krapacs ou Carpathes & leurs bras, qui se repandent jusques dans la Russie.
- 3) Cette bosse ou ce plateau élevé dans l'intérieur de la Russie européenne, connu des anciens Géographes sous le nom de *Mons alaunus*, dans lequel les couches horizontales de diverses montagnes semblent se réunir, & qui renferme les sources des principaux fleuves de cette partie de l'Empire,
- 4) les monts septentrionaux situés entre la mer baltique & la mer blanche, n'étant qu'une continuation de la chaîne des montagnes de la Scandinavie.
- 5) les montagnes ouraliques, qui commencent près de la mer blanche & des îles de Nova-zemlia, & leurs branches qui se deployent vers le midi.

- 6) Les montagnes qui forment la frontière entre la Sibérie & les autres contrées de l'Asie, & qui font une branche du grand système des Alpes de l'Asie, laquelle en s'étendant depuis l'Irtiche jusqu'à l'Océan oriental, prend des noms divers comme ceux d'Altai, Telezkoi, Sayanskoi & Stanovoi Chrêbet, & appartient par sa pente septentrionale seulement à l'Empire russe. Entre les branches secondaires de cette chaîne de montagnes limitrophes la plus remarquable sera celle, qui revient vers le Nord-Est en traversant le cours du Lena & du Yeniseï, & qui fournit les eaux aux rivières qui vont se décharger entre celles-là dans la mer glaciale.

Section quatrième.

Limites fixes & immuables entre l'Asie & l'Europe
dans l'intérieur de la Russie.

Après avoir remarqué les limites, que les Géographes en divers tems se sont avisés d'y mettre arbitrairement, on s'étendra sur celles, que la nature y forme elle même. Ce sont les montagnes ouraliques, qui séparent, comme l'on fait, la Sibérie d'avec la Russie; puis cette grande suite de montagnes en couches horizontales, laquelle en commençant de la rivière Bielaya porte entre Casan & Orenbourg le nom d'Oural, & continue entre les rivières de Samara & d'Oural sous le nom d'Obtschei Sirt, d'où part cette hauteur continue de pays, qui s'étend par les déserts des Calmouques & du Couma, va s'approcher de la mer d'Asov, & sépare de l'Europe les déserts salés, qui avoisinent la mer Caspiene. C'est
par

par conséquent à cette mer, réputée depuis long tems ensemble avec la mer noire, comme servant de limites entre l'Europe méridionale & l'Asie mineure, que la nature a fixé des bornes immuables, moyennant lesquelles les différentes provinces attribuées tantôt à l'une tantôt à l'autre partie du monde, restent attachées chacune à la sienne: du moins le circuit de l'Europe en est une fois pour toutes déterminé au juste.

Section cinquieme.

Description générale des mers sur lesquelles la Russie domine & des îles qu'elles forment: leur situation générale, étendue, golfes principaux, propriétés, flux & reflux, avec un simple indice des fleuves, qui s'y jettent immédiatement.

Ces mers sont:

la Caspiene.

la noire & celle d'Asov.

une partie de la mer baltique.

la mer blanche.

la mer glaciale.

la mer qu'on trouve entre la partie de Nord-Est de l'Asie & de l'Amérique: enfin les îles situées dans chacune des dites mers appartenantes à la Russie.

Section sixieme.

Description des principaux fleuves suivant leurs sources dans les montagnes marquées ci-dessus, leur cours & écoulement dans les mers mentionnées, qualité & rapport
entre

entre eux: puis les lacs qu'ils parcourent, ou auxquels ils communiquent. Comme la description suivant la source des fleuves semble être de beaucoup préférable, viennent à détailler :

- 1) Les eaux qui découlent du grand plateau élevé au milieu de la Russie & des monts septentrionaux, qui s'y joignent de près.
 - a) la Dwina qui porte ses eaux dans la mer blanche, & les principales rivières qui s'y mêlent,
 - b) les grands réservoirs d'eaux, comme les lacs d'Onega, de Ladoga, de Plescou & de Peipus, & les rivières de la Neva & de la Narova qui en sortent, & se jettent dans le golfe de Finlande.
 - c) la Duna qui mêle ses eaux à la mer baltique.
 - d) le Dnepr qui se décharge dans la mer noire.
 - e) le Don ayant son écoulement dans celle d'Asov.
 - f) la Wolga qui va se jeter dans la mer Caspienne, & les rivières qu'elle reçoit dans son lit du côté du Sud.
- 2) Les fleuves qui se réunissent du côté occidental des montagnes ouraliques.
 - a) la Petschora qui mène tous les ruisseaux de la partie septentrionale des monts ouraliques dans la mer glaciale.
 - b) la Kama qui se jette elle même dans la Wolga, & y fait décharger moyennant la Bielaya toutes les autres rivières de moindre grandeur, qui sortent de l'ouest des monts ouraliques.

3) les

- 3) les Rivières qui sortent à l'Est des dites montagnes.
 - a) l'Oural qui prend sa direction vers l'Ouest de ces montagnes & se décharge dans la mer Caspienne.
 - b) les rivières qui ont leur source dans une grande partie de ces montagnes, & qui mêlent leurs eaux avec celles du Tobol.
 - c) les petites rivières qui sourdent au Nord des montagnes d'Oural, & vont directement se décharger dans l'Obi & dans la mer glaciale.
- 4) les Fleuves, qui descendent de ces grandes montagnes, qui font la barrière de la Sibérie, & leurs branches vers la mer glaciale.
 - a) l'Irtiche & l'Obi.
 - b) le Tasse.
 - c) le Yenisei & les rivières considérables qui s'y rendent du côté de l'orient, les trois Toungousks, & le lac Baical avec ses rivières.
 - d) les petites rivières entre le Yenisei & la Lena, qui viennent du Nord de la Toungouska inférieure, & entrent enfin dans la mer glaciale.
 - e) la Lena & les bras dans les quels elle se partage.
 - f) les rivières de la Sibérie septentrionale, la Jana, la Chrona, l'Indigirka, Alascia & Kowina.
- 5) le Fleuves découlants de la partie orientale des monts Sibériens, lesquels se réunissent à l'Océan oriental :

- a) l'Anadyr :
- b) les fleuves du Kamtschatka.
- c) les petites rivières & les torrents, qui venant des montagnes le long des côtes tombent dans la mer d'Ochotzk, dont le principal est nommé Oud.
- d) l'Amur, & séparément les rivières qu'il réunit, & qui traversent la Daurie russe.
- 6) C'est ici où l'on pourra détailler le voisinage des rivières dans tout l'Empire, & la Communication par eau qui en dépend, tant par des canaux que par de courts trajets, qui se font par terre.

Section septième.

Topographie générale de la Russie.

1) de la Russie en général.

- a) la constitution naturelle, ou les propriétés de cette grande plaine selon ses différentes parties, ses plateaux élevés & ses vallées, ses forêts, déserts, marais, régions fertiles ou stériles, & les autres variétés du sol, qui s'étendent sur plus d'un seul gouvernement.
- b) les différents climats dans la Russie septentrionale tempérée, & dans la méridionale, suivant des observations météorologiques : la culture des pays.
- 2) de la Sibirie en général.
- a) Sa position considérée généralement ; puis sa pente depuis les monts ourals vers les Limans ou lacs marécageux de l'Obi, & celle depuis la grande

grande montagne frontiere vers la mer glaciale ;
sa région vers le Nord - Est élevée & hérissée
de montagnes, celle vers le Sud qui est fertile,
celle vers le Nord toute couverte de forêts, &
enfin la plus voisine du pôle, marécageuse & ste-
rile, ainsi que les différentes variétés du sol.

- b) Le climat rude de la Sibérie, & les raisons qu'on en
donne, eu égard à sa situation, à ses montagnes,
& à d'autres circonstances: les contrées qui sont
cultivées, & à quel point la culture y a été
poussée, & lesquelles n'en sont point du tout
susceptibles.
- 3) des grands chemins dans l'Empire, de ceux de tra-
verse, qui sont nécessaires & fréquentés à l'ordina-
ire, comme aussi de ceux de communication avec
les pays limitrophes.

Section huitieme.

Spécification & Critique raisonnée des cartes géo-
graphiques tant terrestres que marines, qui regardent
l'Empire.

Seconde Partie Principale.

Qui comprend l'histoire générale de l'Empire de la
Russie & se divise en deux Sections.

Section premiere.

Points principaux de l'histoire générale de la Russie.

- a) Histoire ancienne de la Russie, ses anciens habi-
tans,

tans , & les peuples qui s'y sont établis , ou y ont fait des passages.

- b) Histoire moyenne , qui regarde la Russie divisée en plusieurs principautés , leur sort , séparation & réunion : On pourra traiter en même tems de l'ancienne division en Russie grande & petite , & en Russie blanche & rouge.
- c) l'Histoire moderne eu égard sur tout à ses nouvelles conquêtes , & aux pays nouvellement découverts.

Section seconde.

Histoire particuliere des nations sujettes à la Russie.

- a) Spécification des nations.
- b) Description détaillée de chaque nation suivant leurs tiges différentes, l'histoire de leur soumission , puis leurs habitations , leur nombre , religion , maniere de vivre , moeurs & usages , enfin leurs habillemens , économie , langue , arts & métiers.

La description & la division des nations selon les quinze tiges ou races principales , paroissent préférables.

Les voici :

I. Nations esclavones.

- a) Russes par toute l'étendue de l'Empire.
- b) Polonois dans les Gouvernemens de Polotzk & de Mohilow.

II.

II. Nations allemandes.

- a) Allemands en Esthonie & en Livonie.
- b) Suédois dans la Finlande russe.

III. Nations lettoniennes.

- a) Lettoniens proprement dits en Livonie, & dans la Livonie auparavant nommée polonoise.
- b) Lithuaniens dans les Gouvernements de Polotzk & de Mohilow.

IV. Nations finlandaises.

- a) Finlandois proprement dits dans les Gouvernements de Wibourg & de St. Pétersbourg.
 - b) Esthoniens dans le Gouvernement de Reval, & dans une partie de celui de Livonie.
 - c) Les LIVES dans le Cercle de Riga près de Salis.
- Nations qui descendent, à juger par la langue qu'elles parlent, des Finlandois.
- d) Lapons dans le Cercle de Kola.
 - e) Permiens dans la Province de Permie située dans le Gouvernement de Casan & dans les régions septentrionales de l'Obi.
 - f) Sirianiens dans le Cercle de Iarensk.
 - g) Wotiakes dans les Gouvernements de Casan & d'Orenbourg.
 - b) Tscheremisses dans les Gouvernements de Casan, de Nischnei-Novogorod, & d'Orenbourg.
 - i) Tschouvasses.

- k) Teptéres dans la Baschkirie mêlés de Tschou-
vasses, de Tischeremisses & de Wotiakes.
- l) Mordouanes & ceux qui en descendent, les Mosch-
kans, et les Ersans dans les Gouvernements de
Nischnei-Novogorod, de Casan et d'Orenbourg.
- m) Woguls aux deux côtés des monts ourals.
- n) Ostiakes sur l'Obi jusqu'à Narim & Surgoutsch
dans le Cercle de Beresow.

V. Nations Tatares.

- 1) Tatares proprement dits.
 - a) Ceux de Casan dans le Cercle du même nom ,
des quels descendent 1) les Tatares dans le Cer-
cle de Woronéze , dans la Ville de Kasimov &
ses environs, 2) ceux dans le Gouvernement d'O-
renbourg près de la Sakmara, 3) ceux à Kargal
4) ceux à Uffa, 5) les Itschiens près de la ri-
viere d'Itsch , dans la Province d'Isét , 6) les
Tschatzkiens à Tomsk & aux environs.
 - b) Ceux de Tobolsk aux deux rives du Tobol, de-
puis la frontiere des Kirguises jusqu'à l'embou-
chure du Tobol.
 - c) Ceux de Tomsk aux deux bords du Tom , de-
puis la montagne de Kousnezk jusqu'à l'embou-
chure du Tom.
 - d) Melessés dans le Cercle de Tomsk.
 - e) Tuliberdiens à la rive droite du Tom au dessus
de Kousnezk.
 - f) Abinzes en remontant le Tom, sur les montagnes
& les rivières de Kondoma & de Mraza.
 - g)

- g) Ceux d'Obi sur la rivière de ce nom, depuis l'embouchure du Tom jusqu'au dessus de Narim.
- h) Barabinzes entre l'Irtiche & l'Obi dans le désert Barabinzien.
- i) Turinskes au bord de la Tura depuis les frontières des Wogals jusqu'à l'embouchure de la Tura.
- k) Aiales à l'embouchure de la Tara.
- l) Katschinzes au bord occidental du Yenisei entre les rivières de Juffet & d'Abakan.
- m) Tschulimes sur la rivière de Tschulima, lesquels se sont partagés en trois branches.
- n) Udinskiens entre les montagnes près de Grenskoi-Ostrog.
- o) Kaschiens.
- p) Yarenskes & leurs différentes branches sur l'Abakan, le Kysir, le Tess & la Yurba.
- q) Biriouffes & leurs trois branches autour du Taschtip.
- r) Kobinzes sur le Taschtip, le Taia, & l'Abakan.
- s) Beltires sur l'Abakan.
- t) Sagayes le long de l'Aschkisch, de Bafa, de Sur, & dans le désert sur l'Abakan.
- 2) Mankates ou Nogaiens au bord de l'Agtuba depuis Tschigit jusqu'à la mer Caspienne.
- 3) Mestscherâques dans le Gouvernement d'Orenbourg.
- 4) Baschkires dans le Gouvernement d'Orenbourg & dans la Province de Permie.

- 5) Kirguises de la horde moyenne, & de la petite dans le désert des Kirguises.
- 6) Jakoutes sur la Lena & au bord oriental de ce fleuve.
- 7) Téléoutes sur le Tom depuis les hautes montagnes jusqu'à Koufnezsk.
- 8) Télecès au bord du lac d'Oltan.
- 9) Les habitans du Caucase, dont une partie est d'origine tatare, & dont l'autre ne porte que le nom de Tatares.
 - a) Troughmènes à l'embouchure du Kouma.
 - b) Offettes dans le milieu du Caucase.
 - c) Tschitschenges dans la partie orientale de la grande Kabardie.
 - d) Kustengues ou Kistènes en Kistézie sur la Sunsha.
 - e) Koumukes sur la Sunsha inférieure & le Téreck.

VI. Nations Samoyedes.

- 1) Samoyedes proprement dits dans la partie la plus septentrionale de la Russie sur la Lena.
 - a) Européens, c'est à dire ceux qui habitent les cercles de Mésén, de Kanan, & de Yugorie.
 - b) Sibériens.
 - 1) Tasiens sur le Tas entre l'Obi & le Yenisei.
 - 2) Mangaséens sur le Tourachan & autour de la Ville de Mangaséa.
- 2) Nations qui descendent de Samoyedes:
 - a) Morases ou Ostiakés de Narim en remontant le
Sur-

Surgut, sur le bord de l'Obi jusqu'à Narim,
& à l'embouchure des rivières Ketta & Tom.

- b) Kaimaches dans le district de Krasnoïarsk à la source des rivières de la Kana & de la Mana.
- c) Ostiaks du Yeniseï dans le district de Krasnoïarsk.
- d) Kustimes sur la rive gauche du Tom.
- e) Yourales entre l'Obi & le Yeniseï, sur le bord de celui-ci, & en dedans du pays.
- f) Kotovces sur la Kana.
- g) Kaibales sur le Yeniseï.
- h) Karagasses dans le territoire d'Udinsk.
- i) Moutores sur le Yeniseï, l'Obi & Touba.
- k) Ossanes dans le district de Yeniseï, sur l'Ussolka.
- l) Saïotes au pied des Montagnes Saïanes, & au bord oriental du Yeniseï au delà de l'Ussâ.

VII. Nations Mongales.

- a) Mongales proprement dits dans le cercle de Sélen-
guinski.
 - b) Derbêtes
 - c) Torgautes
 - d) Siongores
- } sur le Wolga.
- e) Bourates dans les Gouvernements d'Irkutzki & de Tobolski.

VIII. Tougoufes & leurs différentes branches, depuis le Yeniseï jusqu'à l'Océan oriental, & depuis le Golfe de Penfinski jusqu'aux frontières de la Chine.

IX. Kamtschadales dans la partie méridionale du Kamtschatka.

- X. Koryäkes dans la partie septentrionale du Kamtschatka, aux environs du Golfe de Pensinski, sur l'Océan oriental presque jusqu'à l'Anadyr.
- XI. Kouriles dans le Kamtschatka méridional, & dans les îles Kouriles entre le Kamtschatka & le Japon.
- XII. Aléoutes dans les îles qu'on a nouvellement découvertes dans le détroit qui sépare l'Asie de l'Amérique.
- XIII. Arinces dans le district de Krasnoïarsk.
- XIV. Youkaguïres près de la mer glaciale jusqu'à la source de l'Anadyr.
- XV. Tschouktsches dans la partie de Nord - Est de la Sibérie.

Colonies de peuples voisins.

1) Tatares.

a) Bouckhares dans la Province d'Uffa & à Tobolsk.

b) Chivinces.

c) Taschkentiens. } dans les Gouvernements d'O-

d) Turkestaniens. } renbourg, de Casan, &
d'Astracan.

2) Persans dans le Gouvernement d'Astracan.

3) Indiens à Astracan.

4) Finlandois près de Waldai.

5) Polonois sur l'Irtiche, & dans le district de Sélinguinski.

6) Allemands dans les Gouvernements de Pétersbourg & d'Astracan.

7)

- 7) Grecs à Neshin.
- 8) Serviens dans la Nouvelle Russie.
- 9) Moldaves & Valaques dans la forteresse de St. Dmitrii.

Troisième Partie principale.

ou

Description générale politique de l'Empire.

Section première.

Du Gouvernement.

- 1) De la souveraine Puissance, ses droits, titres & armes de la Cour, des Ordres de Chevalerie, & de la classification des Rangs.
- 2) De la forme du Gouvernement, du Sénat, des Colleges de l'Empire, & des Loix.
- 3) De la forme des Magistrats particuliers dans les différentes provinces de l'Empire.

Section seconde.

De l'État militaire.

- 1) Des forces de terre, & de leur direction.
- 2) Des forces navales, de l'Amirauté & du département de l'Intendance, comme aussi des forêts, qui fournissent le bois pour la construction des vaisseaux &c.

Section troisieme.

De la Religion dominante
& de celles qui sont tolérées: du Clergé

- 1) Du Synode, & d'autres états ecclésiastiques.
- 2) Des Couvents & du nombre de leurs habitans, de leur entretien, & reglement.
- 3) Du nombre des Prêtres, & des desservants d'Eglise.
- 4) Des Religions tolérées, & de leur reglement ecclésiastique, sur tout de celles des peuples en Asie.

Section quatrieme.

Du Magistrat civil, & de sa forme.

- 1) Chambres de justice: la Police.
- 2) Etablissements d'éducation.
- 3) Histoire des Beaux arts & des Sciences.

Section cinquieme.

De la Population de l'Empire.

- 1) Supputation comparative du nombre des habitants & du terrain d'une province à l'autre.
- 2) Différents ordres du peuple, leur droits, immunités & charges ou impôts: le nombre que chaque ordre renferme, & leur relation entr'eux dans les diverses provinces de l'Empire.

Section sixieme.

Raisonnement sur le raport actuel des occupations
économiques.

Des membres de l'Etat qui consomment, & de ceux
qui produisent: de gens à capitaux, d'officiers publics, de
do-

domestiques , de marchands & de merciers, de malades & de mendiants , considérés comme des membres de l'Etat qui ne font que consommer. De ceux qui s'occupent à la chasse, à la pêche, ou à l'entretien du bétail , qui labourent la terre , ou travaillent aux mines , de ceux qui exercent les arts mécaniques & les métiers , de ceux qui sont employés dans les fabriques & dans les manufactures, regardés comme des membres de l'Etat, qui produisent.

Section septieme.

Détail des richesses naturelles, & des prérogatives de l'Empire.

Des climats, de l'étendue des terres labourées calculée par Dessâtines; des fruits de la campagne qui servent à la nourriture; du lin, du chanvre, du coton avec le détail de leur produit annuel, & le raisonnement sur leur proportion: des terres incultes tant de celles qui sont labourables, que de celles qui sont tout à fait ingrates; des contrées riches en bois , à quoi l'on joindra des observations forestieres générales, & un calcul par raport au gain: du bois de charpente, & du bois à bruler, des nattes, du goudron , de la térébentine & de la soude: des différents paturages, des vignes & des avantages qu'on pourra tirer de leur culture, des plantes sauvages qui sont un objet du commerce; de la distillation de l'eau de vie, de la brasserie de la biere, du vinaigre & de l'hydromel; du raport économique de l'entretien des abeilles , des vers à soie; des bêtes à cornes , & des autres animaux domestiques, de la nourriture de la volaille; de la chasse & de la pêche; enfin des revenus qu'on retire du salpêtre, du

souffre, de la poudre à canon, du vitriol, de l'alun, du sel, des briques, de la chaux, du plâtre, des meules, des pierres à aiguiser, des pierres de taille, & des métaux, comme aussi des minéraux qu'on a manqué de mettre à profit, & de l'usage auquel on pourroit les employer.

Section huitième.

Du Commerce.

- 1) Du Commerce intérieur; des postes & des trajets en se rapportant aux observations précédentes sur les chemins, les passages & les communications par eau, des voitures; des exemptions de peage, des besoins réciproques des places principales de l'Empire, des étapes, des foires & des marchés ordinaires; des poids & des mesures, de l'argent, où l'on fera l'histoire de monnoies russes & du monnoiage actuel, de la quantité des especes tant intérieures qu' étrangères qui circulent, & de leur proportion à la somme des marchandises; de l'établissement des banques & de la somme en argent de banque, suivie de la comparaison des especes effectives à celles en papier; de l'intérêt de l'argent, & du crédit; du cours & du droit de change; du prix moyen des marchandises &c.
- 2) du Commerce extérieur de l'Empire & de la commodité que les ports, la navigation & les traités de commerce y apportent; des différens Bureaux de la douane, de leur reglements & distribution, du tarif & de la contrebande; de l'exportation annuel-

annuelle de marchandises cruës & de vivres, des frais d'exportation; de l'exportation de marchandises fabriquées & de leur impôt; de l'entrée de marchandises cruës & des droits qu'elles payent, de l'entrée de marchandises fabriquées & de leur péage; de la balance du commerce; du Commerce par la mer baltique & la mer blanche avec les autres Puissances de l'Europe; du Commerce par terre avec la Pologne, la Prusse & les villes de Dantzic, de Breslau & de Leipzig; du Commerce avec la Turquie par terre & par la mer noire; du Commerce entre la Perse & le Gouvernement d'Astracan, de celui entre la Boukharie, les Kirguises & le Gouvernement d'Orenbourg, puis de celui qui se fait entre la Chine, & la Sibérie, & enfin de celui entre Kamtschatka & l'Archipel oriental.

Quatrieme Partie principale.

ou

Géographie particuliere de l'Empire de Russie.

Elle ne contient qu'une seule section.

Division actuelle de l'Empire en ses Lieutenances & ses Gouvernements. Dénomination & désignation d'après certains noms généraux usités pour les districts.

Voici le plan qu'on s'est proposé de suivre dans la description des Lieutenances & des Gouvernements, qui feront l'objet des chapitres suivans :

1) Eten-

- 1) Etendue & frontieres de la Lieutenance ou du Gouvernement. Dimension en miles quarrées géographiques. Division en Provinces, Districts & Cercles &c.
- 2) Qualité ou condition générale: montagnes, plaines, forêts, marais, deserts, sols fertiles & steriles, où l'on détaillera en même temps plus amplement les principales montagnes & les plateaux.
- 3) Description plus circonstanciée qu'elle ne l'a été dans la partie générale, des mers frontieres, (s'il y en a,) de leurs propriétés, golfes, caps, îles &c.
- 4) Description des eaux courantes, tant des fleuves qui traversent les Lieutenances & les Gouvernements, que des rivières moins grandes, & des ruisseaux considérables qui s'y mêlent.
- 5) Détail des lacs d'eau douce & d'eau salée, des sources, des eaux minérales, des bains &c.
- 6) Dénombrement des villes, villages, bourgs & habitations: Le nombre d'habitants & leur diversité par rapport aux nations, & le nombre de chaque espece.
- 7) Précis de l'histoire ancienne & moderne des Gouvernements; des peuples qui les ont habités ou traversés, enfin des tombeaux & d'autres monuments qui nous sont restés d'eux.
- 8) Productions de chaque Gouvernement en pierres, minéraux & métaux, celles des regnes végétal & animal. On n'en fera qu'un simple indice en renvoyant le lecteur à la partie physique.

9) Agri-

- 9) Agriculture, entretien du bétail, métiers, établissemens, fabriques & manufactures; commerce particulier de chaque Gouvernement.
- 10) Jurisdiction ecclésiastique & séculière, revenus &c.
- 11) Enfin selon l'ordre des Provinces ou Districts,
 - a) Leurs frontières fixées.
 - b) Description des villes, forteresses, couvents, villages, fontes de mines, pêcheries, ports & autres habitations remarquables selon l'ordre géographique.

Cinquieme Partie principale.

ou

Description physique de l'Empire & de ses Productions.

partagée en deux livres.

L i v r e p r e m i e r .

Minérogaphie & Minéralogie de la Russie & de la Sibérie enrichie des cartes nécessaires minérogaphiques.

Introduction.

Nature générale & diversité des montagnes de la Russie.

Section première.

Du Caucase.

- 1) Sa qualité en général, ses différentes especes de montagnes, & ses couches.

Histoire de 1778. P. I.

d

2) Les

- 2) Les différentes mines qu'on y a découvertes & d'autres minéraux utiles.
- 3) Ses sources d'eaux minérales, & l'usage qu'on en peut faire.

Section seconde.

La Chaîne de montagnes continuées des monts Krapacs, les différentes roches qui les composent; minéraux utiles & autres objets remarquables.

Section troisième.

Les montagnes septentrionales dans l'enceinte de la Russie.

- 1) Les diverses espèces de roches dont elles sont composées, leur site ou position naturelle.
- 2) Les mines qu'on y a ouvertes, & les travaux d'exploitation qui s'y trouvent.
- 3) Carrières de marbre & autres minéraux utiles, sources &c.

Section quatrième.

La chaîne des montagnes d'Oural.

- 1) Les diverses roches qui les composent, leur position, & autres objets qui méritent attention.
- 2) Les grandes montagnes en couches horizontales de nouvelle formation du côté du couchant & l'abondance de mines de cuivre qu'on y trouve.
- 3) Les mines dans les montagnes à filons surtout du côté du levant de cette chaîne, & tous les établissements métalliques, qui dépendent de Cathérinenbourg.

4) Car-

- 4) Carrières de marbre & autres minéraux très utiles, salines, sources d'eaux minérales &c.

Section cinquieme.

Les Couches dans le plat pays du Continent de la Russie.

- 1) Leur Position, les plateaux qu'elles forment, anciennes traces de la mer, & autres observations & remarques générales.
- 2) Les minéraux & les différentes sortes de pierres & de terres que ces couches contiennent.
- 3) Description du désert uni méridional, ses riches salines, ses lacs, & différentes espèces de sel.

Section sixieme.

La Chaîne des montagnes Altaïques & toutes celles qui s'inclinent vers l'Obi & l'Irtiche.

- 1) Les différentes roches qui les composent, leur position & autres objets curieux.
- 2) Les riches mines & minières altaïques.
- 3) Autres minéraux remarquables qui s'y trouvent.

Section septieme.

Les plaines entre les chaînes ouralique & altaïque.

- 1) Les monts dans les déserts d'Ischimsk, & des Kirguïses.
- 2) Les métaux & les minéraux qu'on tire de ceux ci, & de ces plaines abondantes en couches.
- 3) Les lacs salés.

Section huitième.

Les montagnes qui bordent le Yeniseï & s'étendent jusqu'au Koffogol.

- 1) Les diverses sortes de montagnes qui les composent, disposition intérieure, couches, objets mémorables.
- 2) Les minières dans le district de Krasnoïarsk & autres filons métalliques sur le Yeniseï.
- 3) Minéraux, lacs salés, sources.

Section neuvième.

Les contrées montagneuses au delà & autour du Baikal avec celles de Wercholénie.

- 1) Nature générale de ces contrées, & les différentes sortes de roches, dont elles sont formées.
- 2) Les mines de Nertschinsk.
- 3) Les filons métalliques qu'on exploite dans le désert des Bratski, dans les environs du Baikal & en remontant la Lena.
- 4) Minéraux & détails de tout ce qui mérite d'être remarqué de ces montagnes.
- 5) Bains chauds, & sources d'eaux minérales, lacs salés &c.

Section dixième.

Les montagnes qui en prenant leur direction à travers de la Lena entre la Podkamennaïa & la TOUNGouska inférieure, s'avancent du côté du couchant jusqu'au dessus

dessus du Yenisei, dont les couches s'aprochent de la mer glaciale, autant que nous en avons connoissance.

Section onzieme.

La partie montagneuse de la Sibérie du côté du Levant, d'après le peu de connoissance qu'on en a.

Section douzieme.

La Presqu'île de Kamtschatka & les îles situées vis à vis du Japon & de l'Amérique; description des minéraux, & des métaux, qui s'y trouvent, autant qu'on en peut avoir de nouvelles.

Section treizieme.

Minéralogie de la Russie.

Elle comprendra une description détaillée de la nature & de la composition variée des montagnes mentionnées ci dessus :

- 1) Hydrologie.
- 2) Halurgie.
- 3) Minéraux combustibles.
- 4) Métaux.
- 5) Fossiles.

Livre second.

Description économique & physique
du regne végétal.

Section premiere.

Les diverses sortes du bled qu'on cultive en Russie; détail de l'agriculture & de son état dans les diffé-

rentes provinces de l'Empire, des instruments du labourage, des manieres usitées tant bonnes que mauvaises pour engraisser les champs; conseils pour les perfectionner, comme aussi pour préparer & pour conserver le bled.

Section seconde.

Végétaux dont les racines ou d'autres parties servent à la nourriture; herbes potageres, legumes, racines, épiceries russes de semence & d'herbes, plantes qui appartiennent au genre des concombres, des melons & des arbouses avec leurs especes, culture & préparation: indice général des especes universellement utiles dont l'usage n'est pas encore connu; plantes & racines sauvages propres à la nourriture.

Section troisieme.

Végétaux qui apportent immédiatement un avantage économique.

- 1) Le lin, ses especes, sa culture & préparation.
- 2) Le chanvre & d'autres végétaux, dont on pourra se servir à la place du chanvre:
- 3) Le coton, ses especes, préparation & culture.
- 4) Végétaux sauvages dont la soie des semences pourra devenir utile.
- 5) Le houblon.
- 6) Semences propres à exprimer de l'huile.
- 7) La culture du tabac.
- 8) Végétaux, dont la cendre sert pour en faire de la soude.

Section

Section quatrième.

Végétaux qui peuvent être employés dans les fabriques
& dans les manufactures.

- 1) Plantes & racines bonnes à la teinture, conseils pour les cultiver & pour les bien préparer: spécification de celles qu'on peut semer avec avantage dans diverses contrées marquées de l'Empire; indice des plantes exotiques qu'on pourroit indigéniser à la Russie par une culture soignée, comme le safran, & la plante qui fournit l'indigo.
- 2) Plantes & racines bonnes à la tannerie.

Section cinquième.

Végétaux salutaires & nuisibles pour la Santé.

- 1) Plantes utiles à la médecine, ou qu'on y pourroit employer; remèdes domestiques usités en Russie, remèdes pour le bétail.
- 2) Végétaux vénémeux & malfaisants, dont il faut ajouter le dessin pour prévenir toutes les méprises dangereuses.

Section sixième.

Herbes qui font les meilleures prairies en Russie & en Sibérie, ou dont on pourroit former des prairies artificielles. Pâturages par rapport à leur diverse utilité & à toute sorte de bétail qu'on y fait paître.

Section septième.

Plantes & arbrisseaux qui aiment le terrain sablonneux & qu'on pourroit semer tant pour fixer ces terrains,
que

que pour en faire des pâturages , à mesure que la population s'augmente.

Section huitieme.

Culture de la vigne & moyens de la perfectioner.

Section neuvieme.

Arbres qui portent des fruits en pommes ou à noyaux, leur culture, fruits, & grains sauvages.

Section dixieme.

Culture des meuriers.

Section onzieme.

Arbres forestiers & arbrisseaux qui croissent en Russie: arbres exotiques, qu'on pourroit propager dans l'Empire.

Section douzieme.

Champignons & mousses, leur utilité & leurs qualités nuisibles.

Section treizieme.

Détail général des végétaux spontanées en Russie; désignation des contrées où ils proviennent, & du sol qu'ils aiment préféablement, leur dénomination russe; indice de ceux qui sont odoriférants, & de ceux qui servent d'ornement aux jardins, ou qui se font remarquer par quelque autre qualité, sans répéter ce qui en a été dit plus haut, & sans entrer dans des recherches botaniques. C'est ici où il sera bon de faire mention de ces grands enclos destinés pour la coupe du bois, & de déterminer
ensuite

ensuite aussi exactement qu'on peut, l'âge qu'il faut aux arbres, relativement à la qualité du terrain, & aux forêts, pour venir à leur densité ou durété nécessaire, & à quel tems il convient de les abattre, pour en pouvoir tirer le meilleur parti possible.

Livre troisieme.

Le regne animal & les avantages que la Russie en peut recueillir.

Section premiere.

Animaux domestiques, & leur entretien.

- 1) Le Chameau & ses variétés chez les Calmouques & les autres peuples nomades.
- 2) Le Cheval, l'Ane & le Mulet.
- 3) Les Bêtes à corne & leurs variétés encore peu connues comme le Buffle, & la vache de Tibet à crin de cheval.
- 4) L'entretien des brebis & l'amélioration de leur race moyennant des béliers étrangers.
- 5) Les Chèvres & l'utilité qu'on en peut attendre.
- 6) Les Rennes.
- 7) Les Pourceaux, & leurs especes exotiques.
- 8) Les animaux domestiques de moindre grandeur qui servent à la nourriture, comme le Lapin & le Cochon de mer.

Section seconde.

Grands Animaux de chasse, auxquels appartiennent:

- 1) L'Elan.

- 2) Le Cerf.
- 3) Le Chevreuil.
- 4) Le Boeuf sauvage.
- 5) Le Bouquetin.
- 6) Le Mouflon.
- 7) Les Antilopes.
- 8) L'animal qui porte le Musc.
- 9) Le Sanglier.
- 10) Les différentes especes de chevaux sauvages.

Section troisieme.

Animaux carnaciers, & ceux qui sont estimés
par raport à leur fourrure.

- 1) L'Ours blanc & l'ours terrestre.
- 2) Le Glouton.
- 3) Le Blaireau.
- 4) Le Loup
- 5) Le Renard & ses variétés.
- 6) L'Isatis.
- 7) Le Loup-cervier & les chats sauvages.
- 8) Les Loutres.
- 9) Les Martres zibelines, & les fouines.
- 10) Le Putois, l'Hermine, & la Civette.
- 11) Le Castor.
- 12) Le Lievre & ses variétés.
- 13) L'Ecureuil & ses variétés.
- 14) La Marmotte & ses variétés.
- 15) Le Desman ou le Rat musqué.

Section

Section quatrième.

Animaux qui rongent & fouillent la terre & qui font du mal aux hommes.

- 1) La Taupe & les autres animaux qui fouillent comme celle-ci la terre.
- 2) Le Hérisson & ses variétés.
- 3) Les Souris des champs qui font de grands dégâts dans les champs & dans les jardins.
- 4) Les espèces de Souris vulgaires, qui causent du dommage dans les demeures.

Section cinquième.

Animaux marins dont la pêche est lucrative, ou pourra le devenir.

- 1) La Morffe.
- 2) Les Phoques.
- 3) Les Baleines.
- 4) Le Dauphin & ses variétés.

Section sixième.

Oiseaux.

- 1) Oiseaux de proie comme l'Aigle, le Faucon, l'Autor, les Hiboux.
- 2) Oiseaux de la famille des Corbeaux.
- 3) Oiseaux de la famille des Poules.
- 4) Les petits oiseaux qu'on mange & les autres de volière.
- 5) Les Pies, les Alouettes & leurs variétés.
- 6) Les Hérons & leurs variétés.

- 7) Les différentes sortes d'oiseaux aquatiques.
- 8) Oiseaux domestiques.

Section septieme.

Poissons & Pêche, salure & autres préparations
de poissons.

- 1) Poissons d'eau douce.
 - a) L'Esturgeon & ses variétés; la colle de poisson.
 - b) Le Saumon, ses variétés, & les autres poissons passagers.
 - c) Poissons à écailles.
 - d) D'autres especes qui n'appartiennent pas aux mentionnées.
- 2) Poissons de mer.
 - a) Poissons de proie.
 - b) La Morue & ses variétés.
 - c) Les Harengs & leurs variétés.
 - d) Poissons plats.
 - e) Les especes qui restent.

Section huitieme.

Reptiles malfaisants.

Les Serpens, les Lézards, les Crapauds & les Grenouilles.

Section neuvieme.

Insectes.

- 1) L'entretien des abeilles, leur nature & nourriture.
- 2) L'entretien des vers à soie, & les moyens de le perfectionner.

- 3) La Cochenille.
- 4) Les Sauterelles ordinaires, & les autres especes de ce genre.
- 5) Les Vermes vénimeuses qui font du mal, & qui font très incommodes.
- 6) Les Chenilles & les Scarabées.
- 7) Les insectes qui servent à la nourriture, comme l'Ecrevisse, la Crabe.
- 8) Les insectes remarquables à cause de leurs qualités, & les insectes utiles, ou qui peuvent le devenir.

Section dixieme.

Animaux Mollusques & Zoophytes.

- 1) Les limaçons & les autres animaux marins mangeables.
- 2) La moule à perles des rivières.
- 3) Les vermes terrestres & aquatiques, remarquables les unes par le bien, les autres par le mal, qu'elles nous font.

Section onzieme.

Spécification générale de toutes les especes d'animaux qui se trouvent en Russie, leur demeure, & leur dénomination russe selon les différents dialectes qu'on parle dans l'Empire.



Extrait d'une Lettre
de Mr. *Häbn* Sur - Intendant des Mines
écrite à Mr. le Professeur *Pallas*.

De Barnaoul, le 13 Novembre 1777.

Notre petite montagne dite *Serpentine* (*Smeyefskaya*) s'est bien épuisée depuis votre absence : cependant elle fournit encore annuellement assés de minerai pour la continuation de nos travaux des fonderies. Les ouvrages souterrains de *Séménof* se poussent avec plus d'ardeur que jamais, & fournissent seuls autant de mines de plomb qu'il en faut pour occuper continuellement six fourneaux.

L'hyver passé a été ici très doux , à l'exception de quelques bourasques & d'une grande abondance de neige. Le printems a aussi paru de bonne heure cette année. Nos rivières étoient déjà sans glaçons dès le 15 d'Avril : leurs débordements ont été petits & de peu de durée. Selon les avis que j'ai reçus de *Smeyefskaya Gora* il s'y montra le 21 Septembre un nuage chargé de beaucoup de parties terrestres, qui y causa d'épaisses ténèbres. Quelques minutes après se fit sentir l'ouragan, qui pouffoit devant

vant foi le nuage & qui emporta les toits des fabriques qui sont sur la *Korboluba*, outre le grand dommage qu'il causa dans plusieurs habitations. Cela se passa entre 5 & 6 heures du matin. Après 7 heures de la même matinée cette tempête vint avec la même force vers nous : arrivant du Sud-Ouest, elle renversa la tuilerie, & arracha tout le toit & les chevrons de la fonderie (*), faisant sur son chemin encore d'autres ravages soit aux maisons soit dans les jardins. Cependant graces aux soins de la Providence, ce phénomène redoutable n'a coûté la vie ni la santé à personne. Il auroit pu aisément en résulter un incendie, le feu ne manquant pas dans la fonderie, qui étoit d'ailleurs toute pleine de scories ardentes : on prévint ce malheur par les bonnes mesures que l'on prit sur le champ pour l'empêcher. Tous les habitans des endroits par où cet ouragan a passé, se plaignent du dégât qu'il a fait aux maisons & aux forêts.

Le 2 de ce mois (Novembre) vers le soir nous eumes les premières bourasques qui nous apportèrent une quantité médiocre de neige : elles se terminèrent le 4 à neuf heures & demie du soir par un petit tremblement de terre, qui semblable au roulement d'un chariot, passa de l'Ouest à l'Est, & ne dura qu'une demie minute : les maisons & les meubles en furent ébranlés. Nous n'en avions point remarqué depuis l'année 1761, & cette année là ce fut aussi dans le mois de Novembre que la terre trembla, & cela par un mouvement cylindrique, pendant près de deux minutes.

De-

(*) Cette fonderie a 52 toises de long sur 10¹/₂ de large : elle est adaptée pour rafraîchir le cuivre de rosette & pour purifier l'œuvre.

Depuis le mois de Juillet jusqu'à la fin d'Octobre, il a régné entre *Smeyefskaya Gora*, & nos environs de l'*Ob*, le long des rivages de ce fleuve, une mortalité subite parmi les chevaux & les boeufs. En recherchant la cause du mal dans les animaux crevés, on a trouvé qu'il provenoit de vers capillaires qu'ils avoient avalés, & dont les petites rivières, les ruisseaux, & les eaux dormantes ont été toutes remplies cette année. Ces vers avoient pénétré de l'estomac dans les poumons, dans le foie, & même dans le coeur. Il n'en réchappa que les bêtes aux quelles on administra à tems des remèdes vermicides & purgatifs, outre lesquels rien ne pouvoit les sauver. Dans ma maison il y eut 9 vaches de malades, & 5 en périrent.



ANATOMIE.

Notice touchant un monstre biforme, dont les deux corps sont réunis par derriere.

Le 21 de Mai 1778 le Sénat dirigeant notifia à l'Académie que dans le Gouvernement de Twer & nommément dans le Village paroissial appelé *Sabestilova Gorka*, une femme étoit accouchée d'un monstre encore vivant à double corps; demandant que l'Académie donnât une instruction par écrit touchant la maniere la plus convenable & la plus vraisemblable de conserver la vie à ce monstre & de le soigner; ou en cas de mort, de le préserver de dommage, afin de le faire parvenir à l'Académie. Celle-ci se chargea de ce soin, & l'instruction requise fut envoyée au Gouvernement de Twer.

Le monstre expira au bout de deux mois, & parvint à l'Académie peu de tems après. A son aspect on trouva qu'il étoit de cette sorte de monstres humains très rares, où les deux corps qui les composent sont joints par derriere. Les troncs entiers jusqu'à la région des

Histoire de 1778. P. I. f han-

hanches , aussi bien que les têtes , les bras , & les pieds étoient entièrement dégagés. Il n'y avoit que les bassins qui tinssent ensemble par la moitié de leur surface postérieure depuis leurs bords supérieurs jusqu'à l'extrémité inférieure de l'os *coccyx* , & il n'y avoit qu'une seule ouverture commune pour *l'intestinum rectum*.

L'Académie conserve dans sa collection 42 monstres tous différents , & il s'en trouve 60 dans celle du College de Médecine à Moscou , mais entre lesquels il y en a qui se ressemblent. Parmi les uns & les autres on n'en voit aucun de ceux qui sont biformes dont les corps soient réunis soit par les bassins , soit dans une autre région de l'épine du dos , soit par les occiputs. Il paroît donc que les trois ou quatre monstres de cette forme dont on a les descriptions (en supposant qu'il ne se soit glissé aucune erreur dans ces descriptions , ou dans les idées que les Anatomistes se sont faites de leur formation) sont , conjointement avec celui-ci , les seuls que la nature ait produits ; ou du moins qu'ils n'ont jamais eu que bien peu de semblables.

Dès que l'on fait par l'observation des oeufs couvés comment les diverses parties du corps se forment peu à peu , & dès que l'on connoit la structure interne de la plupart des sortes de monstres biformes ordinaires ; il n'est pas difficile d'expliquer leur formation d'une manière très sûre & très solide. Mais alors il est d'autant plus inconcevable , comment il peut se former des monstres de cette classe , dont le corps se confondent par derrière :
c'est

c'est ce qu'on ne sauroit expliquer à moins d'en avoir anatomisé un soi même.

Il fut donc plus heureux pour l'anatomie & la physiologie que ce monstre mourût à propos, que s'il eût continué de vivre, & qu'on n'eût pas eu peut-être l'occasion de l'anatomiser. D'ailleurs la maniere dont les deux corps s'étoient joints n'auroit pu produire aucun changement dans leurs operations naturelles; & ces deux filles (car c'étoient des corps femelles) auroient rempli chacune séparément leurs fonctions vitales comme de coutume, hormis qu'elles se seroient sans doute communiqué des maladies dont le principe auroit été dans les suc.

Le monstre fut donc anatomisé, & l'on trouva avec étonnement que l'union de ces deux corps étoit bien différente de celle de tous les autres monstres à deux corps ou à deux têtes, & que la conformation des parties reunies ne ressembloit point du tout à la structure défigurée de tous les monstres en général: de façon que si l'on veut abstraire l'idée d'un monstre de la conformation singulière, mais réductible à certaines règles, que l'on rencontre dans tous les individus de cette classe; on ne pourra pas même compter parmi les monstres ces deux corps joints par une simple concrétion.

Voilà donc la solution du probleme énigmatique, touchant l'idée que l'on doit se faire des monstres qui consistent en deux corps joints par derriere. Ce ne sont pas de vrais monstres, mais des corps doubles, dont la

simple concrétion est bien éloignée de la conformation extraordinaire & particuliere des monstres proprement ainsi dits.

On donnera une description détaillée de ces êtres singuliers avec les figures nécessaires dans un traité qui contiendra la description anatomique de toute la collection de monstres que possède l'Académie, & des pieces les plus intéressantes de la collection de Moscou.

C. F. Wolff.



MÉTÉOROLOGIE.

Observation d'une Aurore Australe.

vüe à St. Pétersbourg le $\frac{6}{17}$ Fevrier 1778.

A 10 heures du Soir il y eut d'abord une aurore boréale très vive & belle, qui d'ailleurs n'avoit rien d'extraordinaire, si ce n'est, qu'elle étoit considérablement éloignée du point de Nord, vers l'Est. Mais en même tems se fit voir un autre phénomène qui paroît remarquable dans l'histoire de ces meteores & intéressant pour leur Théorie. C'étoit une Aurore *Australe*, parfaitement semblable à celles qu'on voit ordinairement vers le Nord, & placée justement au point de Sud.

Un arc lumineux, entre coupé par des nuées, entouroit un espace plus obscur que le reste du Ciel, & lançoit de bas en haut jusqu'à une hauteur d'environ 60 degrés, des colonnes radiantés & des jets lumineux, qui se dissipoient en haut par une espece de fulguration, comme s'ils étoient agités par le vent qu'il faisoit alors.

J'ai vû ce phénomène environ une heure entiere: il devint plus foible ensuite & après quelques efforts pour se renouveler il disparut entierement.

Mr. *Grifclow* a déjà observé ici une lumière australe le $\frac{6}{17}$ Novembre 1751, mais elle étoit tout à fait fixe & immobile, & ne lançoit point de gerbes. Il en a donné une description détaillée dans le IV^e Tome des nouveaux Commentaires.

W. L. Krafft.

Hyver de 1777 à 1778.

Cet hyver fut un des plus doux qu'on ait ressenti à St. Pétersbourg.

1. Il neigea pour la première fois le 7 Octobre 1777 & pour la dernière fois le 19 Avril 1778. L'intervalle entre ces deux termes est de 194 jours.

2. Il gela pour la première fois le 8 Octobre, Therm. 151^{d.}, & pour la dernière fois le 7 Mai, Therm. 152^{d.}. Cet intervalle entre la première & la dernière gelée est de 212 jours.

3. La Néva fut prise pendant 143 jours; depuis le 26 Novembre où elle se couvrit des glaces du Ladoga par un froid de 165^{d.}, jusqu'au 18 Avril au soir, où elle débacla par une température de 149^{d.}. Les Glaçons du Ladoga parurent le 29 Avril, & la Néva les charia jusqu'au 2 de Mai.

4. Depuis le 8 Octobre jusqu'au 7 Mai suivant, le plus grand froid n'a été observé que de 185^{d.} le 20 & 22 Janvier

Janvier matin. Le moindre froid à midi a été de 121^d .
le 25 Avril: ce qui donne une variation totale de 64
degrés de Delisle. Les jours sont marqués suivant le
nouveau stile.

5. Le froid moyen au matin & au soir a été trou-
vé de 158^d . Le froid moyen à midi de 151^d .

6. Le froid au matin & au soir a été.

7 jours entre 180 & 190^d , en Janvier & Février (*)
26 jours entre 170 & 180 , en Novembre — Mars (**)
44 jours entre 160 & 170 , en Novembre — Avril
93 jours entre 150 & 160 , en Octobre — Mai
38 jours entre 140 & 150 , en Octobre — Decembre,
Mars — Mai: enfin
4 jours entre 130 & 140 en Avril.

7. Le froid à midi a été observé.

7 jours entre 130 & 120^d en Avril & Mai (***)
15 jours entre 140 & 130 en Octobre, Novembre, Mars,
Avril & Mai (****)
83 jours entre 150 & 140 en Octobre — Mai
69 jours entre 160 & 150 en Octobre — Mars
26 jours entre 170 & 160 en Novembre — Mars

10 jours

(*) le 20. 21. 22. 26. 28 Janv. & le 11. 12 Février.

(**) le 27 Nov. 30. 31 Dec. 7. 8. 12. 17. 18. 19. 23. 24. 25. 27
Janv. 2. 6. 10. 13. 14. 15 Fevr. 12. 15. 18. 19. 20. 21. 22
Mars.

(***) le 22. 23. 24. 25. 26. 27 Avril & le 1 Mai.

(****) le 1. 2. 3. 4. 5. 6. 27 Oct. 5 Nov. 28 Mars, 14. 15. 16. 17.
18. 21. 28. 30 Avril & le 2. 3. 4. 5. 7 Mai.

10 jours entre 180 & 170 en Janvier & Fevrier
 1 jour entre 190 & 180 le 20 Janvier.

8. L'état du Barometre depuis le 8 Octobre jusqu'au 7 Mai suivant:

la plus grande élévation 28.83 le 11 Fevrier
 la plus petite élévation 27.03 le 24 du même mois
 la variation totale - - 1.80 ou $1\frac{4}{5}$ pouces
 le milieu - - - 27.93
 la hauteur moyenne - 28.09 c. à d. $28\frac{9}{100}$ pouces
 de Paris.

Le Barometre s'est trouvé 137 jours au dessus de $27\frac{9}{10}$;
 102 jours au dessus de 28, & 78 jours au dessus de
 $28\frac{1}{10}$ pouces de Paris.

9. Les vents forts, toujours pendant ce même intervalle de 212 jours d'hiver, soufflerent.

8 jours du Nord le 8 Oct. 4. 24. 26 Jan. 11. 17. 21 Mars,
 & le 13 Avril

8 jours du N-E le 30 Dec. 17 Janv. 19. 20 Mars, 14. 29
 Avr. & le 3. 6 Mai

5 jours de l'Est le 27 Dec. 28 Janv. 18 Fevr. 4 Mars &
 le 19 Avril.

10 jours du S-E le 31 Oct. 24 Nov. 6. 16. 17. 25. 26
 Dec. 12 Janv. & le 14. 26 Fevrier

7 jours du Sud le 25 Oct. 9 Nov. 24 Dec. 11 Janv. &
 le 15. 21. 24. Avril

12 jours du S-Ou. le 16. 17. 23 Oct. 4. 12 Nov. 2 Dec.
 20 Fevr. 28, 29. 30. 31 Mars & le 1
 Mai

11 jours

11 jours de l'Ouest le 11. 22. 28 Oct. 7. 15 Nov. 29 Janv.
 3. 13 Févr. 7. 25 Mars & le 1 Avril
 11 jours du N-Ou. le 13. 21 Oct. 1. 20. 22. 23 Dec. 3
 Janv. 1 Févr. 12 Mars & le 7. 20 Avril

10. Les vents très forts regnerent.

2 jours du N-E le 4 & 5 Mai
 1 jour de l'Est le 19 Février
 3 jours du Sud le 30 Oct. 23 Févr. & le 22 Avril
 10 jours du S-Ou. le 27 Oct. 5. 6 Nov. 15 Dec. 30
 Janv. 24. 25 Févr. 24 Mars & le 16. 23
 Avril
 4 jours de l'Ouest le 14 Dec. 27. 31 Janv. & le 13 Mars.

11. Les autres variations de l'Athmosphère depuis le 8 Octobre jusqu'au 7 Mai suivant, sont annotées dans la table ci-jointe

Athmosphère.		Oct.	Nov.	Dec.	Janv.	Fvr.	Mars	Avr.	Mai	Somme
jours	entièrement serains	1	0	2	5	6	7	10	5	36
jours	entièrement couverts	6	13	22	11	16	11	6	0	85
Brouillards - - -		0	2	5	8	0	2	7	1	25
Pluie	{ médiocre - - -	10	1	6	0	0	5	7	2	31
	{ abondante - - -	0	2	0	0	0	0	0	0	2
Neige	{ médiocre - - -	5	8	9	11	7	12	4	0	56
	{ abondante - - -	0	2	0	3	3	1	1	0	10



Etat du Barometre pour chaque mois des années

1772 — 1777.

Année.	La plus grande Elévation	La plus petite Elévation	La hauteur moyenne	Le Barometre a été au dessus de		
	le Pouches.	le Pouches.		27, 90	28, 00	28, 10
Janvier.						
1772	20. 28, 61	13. 27, 47	28, 13	28 jours	22 jours	19 jours
1773	6. 28, 35	12. 26, 98	27, 82	15	10	7
1774	3. 28, 24	19. 26, 98	27, 78	10	4	3
1775	25. 29, 11	9. 27, 30	28, 29	27	24	21
1776	6. 28, 75	24. 27, 52	28, 26	26	23	19
1777	16. 28, 86	6. 27, 38	28, 33	28	27	25
Février.						
1772	15. 28, 48	27. 27, 10	27, 93	15	11	8
3	10. 28, 78	25. 27, 77	28, 34	27	26	26
4	4. 28, 45	6. 27, 30	27, 84	11	9	6
5	27. 28, 83	5. 27, 22	27, 99	17	14	11
6	1. 28, 28	6. 27, 16	27, 78	12	6	3
7	6. 28, 88	28. 27, 12	28, 20	20	18	16
Mars.						
1772	8. 28, 61	26. 27, 51	28, 10	28	22	16
3	4. 28, 55	17. 27, 07	28, 07	22	19	17
4	23. 28, 78	2. 27, 53	28, 20	25	21	19
5	7. 28, 58	26. 27, 12	27, 88	16	12	8
6	22. 28, 38	25. 27, 41	27, 92	18	12	8
7	25. 28, 44	8. 27, 54	27, 96	19	15	8

Avril.

Année.	La plus grande Élévation	La plus petite Élévation	La hauteur moyenne	Le Barometre a été au dessus de		
	le Pouches.	le Pouches.		27, 90	28, 00	28, 10

Avril.

				11 jours	6 jours	5 jours
1772	14. 28, 31	18. 27, 38	27, 86			
1773	18. 28, 72	30. 27, 90	28, 37	30	28	26
1774	9. 28, 69	25. 27, 76	28, 27	29	25	23
1775	15. 28, 44	12. 27, 44	28, 10	24	21	17
1776	21. 28, 73	13. 27, 33	28, 03	19	13	10
1777	5. 28, 61	17. 27, 45	28, 06	22	18	13

Mai.

1772	14. 28, 37	8. 27, 55	28, 05	25	22	16
3	23. 28, 63	7. 27, 83	28, 22	29	28	24
4	11. 28, 70	17. 27, 70	28, 27	29	28	26
5	2. 28, 53	17. 27, 33	28, 07	22	20	17
6	12. 28, 53	22. 27, 46	28, 06	24	20	14
7	21. 28, 41	19. 27, 59	28, 11	28	21	15

Juin.

1772	13. 28, 43	28. 27, 63	27, 95	16	12	7
3	13. 28, 52	4. 27, 48	28, 03	19	17	14
4	2. 28, 39	12. 27, 68	28, 07	25	22	14
5	3. 28, 39	24. 27, 48	28, 09	25	20	15
6	10. 28, 38	26. 27, 62	28, 04	22	20	14
7	5. 28, 27	28. 27, 67	28, 01	24	17	8

Année.	La plus grande	La plus petite	La	Le Barometre a été		
	Élévation	Élévation	hauteur	au dessus de		
	le Pouce.	le Pouce.	moyenne	27, 90	28, 00	28, 10

Juillet.

				18 jours	14 jours	8 jours
1772	23. 28, 23	8. 27, 46	27, 89			
1773	20. 28, 39	15. 27, 70	28, 04	23	16	11
1774	27. 28, 54	18. 27, 82	28, 07	27	21	9
1775	23. 28, 43	17. 27, 62	28, 11	29	24	18
1776	26. 28, 35	10. 27, 75	28, 07	28	21	12
1777	30. 28, 23	28. 27, 46	27, 87	13	7	13

Août.

1772	6. 28, 22	15. 27, 45	27, 88	13	9	5
3	16. 28, 32	1. 27, 80	28, 05	28	22	10
4	20. 28, 59	4. 27, 68	28, 15	27	21	17
5	9. 28, 62	25. 27, 88	28, 29	31	30	28
6	7. 28, 38	22. 27, 58	28, 02	23	18	11
7	21. 28, 33	37. 27, 71	28, 07	25	21	15

Septembre.

1772	15. 28, 33	4. 27, 52	28, 01	21	16	8
3	30. 28, 48	13. 27, 67	28, 06	20	16	13
4	25. 28, 57	9. 27, 75	28, 28	28	27	25
5	16. 28, 57	21. 27, 88	28, 24	30	27	21
6	25. 28, 29	6. 27, 57	28, 00	22	17	10
7	28. 28, 53	21. 27, 31	27, 96	18	13	9

Octo-

Année.	La plus grande	La plus petite	La	Le Barometre a été		
	Elévati n	Elévation	hauteur	au dessus de		
	le Pouches	le Pouches	moyenne	27, 90	28, 00	28, 10

Octobre.

	13.	28, 65	26.	27, 41	28, 23	26 jours	24 jours	19 jours
1772	9.	28, 83	25.	27, 24	28, 12	26	23	19
1773	29.	28, 78	13.	27, 43	28, 13	23	22	17
1774	3.	28, 48	14.	27, 63	28, 15	25	22	20
1775	24.	28, 78	10.	27, 16	28, 26	26	25	23
1776	3.	28, 33	27.	27, 08	27, 94	21	16	10
1777								

Novembre.

1772	18.	28, 41	12.	27, 66	28, 08	22	20	17
3	23.	28, 88	1.	27, 97	28, 43	30	29	28
4	27.	28, 78	16.	27, 67	28, 14	22	18	15
5	1.	28, 88	16.	27, 56	28, 26	26	26	23
6	12.	28, 87	21.	27, 02	28, 15	21	20	19
7	14.	28, 42	7.	27, 52	27, 91	16	9	4

Décembre.

1772	12.	28, 77	29.	27, 62	28, 10	23	16	11
3	14.	28, 79	31.	26, 85	28, 06	22	17	12
4	8.	29, 21	23.	27, 50	28, 33	25	23	21
5	16.	28, 62	14.	27, 26	28, 01	26	18	14
6	1.	28, 83	24.	27, 51	28, 07	22	17	12
7	9.	28, 46	4.	27, 36	28, 00	25	17	9

Avertissement.

L'Echelle du Barometre est divisée en pouces, dont douze font un pied de France, nommé *pied de Roi*. Chaque pouce est subdivisé en 20 parties: de sorte qu'il est aisé d'estimer les hauteurs du mercure jusqu'aux centiemes parties de pouce.

La 1^{re} Colonne après celle des années indique les plus grandes élévations du Barometre pour chaque mois des fix années. D'abord c'est le jour où cette plus grande élévation a été observée; ensuite la hauteur même dont les deux premiers chiffres marquent les pouces entiers, qui font 28 ou 29, & les deux suivans séparés par une virgule les centiemes parties de pouce.

La 2^{de} Colonne marque de la même maniere les moindres élévations du mercure dans le Barometre.

La 3^e Colonne, les hauteurs moyennes, qu'on obtient en divisant la somme de toutes les hauteurs barométriques par le nombre des observations.

Le trois dernieres Colonnes font voir, combien de jours dans chaque mois le mercure du Barometre a été au dessus des trois termes indiqués de $27\frac{9}{10}$, 28 et $28\frac{1}{10}$ pouces.



Etat du Thermometre pour chaque mois des années

1772 — 1777.

Année.	Jour le plus froid ou le moins chaud.	Froid moyen matin & soir.	Thermometre au dessous de 170 d. 150 d.	Jour le plus chaud ou le moins froid.	Chaleur moyenne à midi.	Thermometre au dessus de 150 d. 130 d.
Janvier.						
1772	le 7 196	172 degrés	17 j. 31 j.	le 19 155	165 degrés	0 j.
1773	29 203	178	23 29	10 146	169	4
1774	15 190	175	21 31	19 149	167	1
1775	24 191	168	10 30	12 147	163	3
1776	18 200	181	27 31	31 155	172	0
1777	30 185	166	8 31	6 148	160	1
Février.						
1772	le 12 208	181 degrés	19 j. 29 j.	le 5 146	168 degrés	3 j.
3	1 193	167	8 28	15 151	159	0
4	10 191	162	9 20	26 144	155	15
5	21 185	163	9 24	3 146	156	11
6	4 187	156	5 18	15 145	150	21
7	2 189	170	14 28	26 144	162	2
Mars.						
1772	le 16 184	168 degrés	19 j. 25 j.	le 25 132	154 degrés	9 j.
3	20 178	162	6 31	12 144	151	15
4	13 182	162	4 30	30 142	151	15
5	8 175	157	1 27	12 143	148	20
6	31 177	160	4 28	16 142	151	16
7	5 186	166	10 31	22 143	155	9

Avril.

Année	Jour le plus froid ou le moins chaud.	Froid moyen matin & soir.	Thermometre au dessous de 170 d. 150 d.	Jour le plus chaud ou le moins froid.	Chaleur moyenne à midi.	Thermometre au dessus de 150 d. 130 d.
-------	--	---------------------------------	--	--	----------------------------------	---

Avril.

1772	le 4	158	151 degrés	0 j.	19 j.	le 16	128	137 degrés	30 j.	4 j.
3	1	153	147	0	5	20	127	136	30	5
4	8	171	153	1	18	28	124	140	25	5
5	15	168	154	0	22	28	135	144	25	0
6	1	176	156	1	25	10	136	144	27	0
7	2	176	157	4	23	13	133	146	20	0

Mai.

1772	le 3	151	141 degrés		5 j.	le 20	125	133 degrés	31 j.	10 j.
3	1	148	139		0	14	118	128	31	19
4	11	147	136		0	26	108	123	31	22
5	1	157	143		4	26	116	133	31	9
6	2	152	141		2	10	114	130	31	16
7	2	148	138		0	16	113	129	31	17

Juin.

1772	le 13	144	137 degrés			le 4	111	125 degrés	30 j.	23 j.
3	5	138	131			15	108	120	30	29
4	13	138	128			6	108	118	30	28
5	3	147	134			21	116	124	30	27
6	6	141	132			13	114	120	30	30
7	7	139	131			15	114	123	30	27

Juil-

Année.	Jour le plus froid ou le moins chaud.	Froid moyen matin & soir.	Thermometre au dessous de 170 d. 150 d	Jour le plus chaud ou le moins froid.	Chaleur moyenne à midi	Thermometre au dessus de 150 d. 130 d.
--------	--	---------------------------------	---	--	---------------------------------	---

Juillet.

1772	le 7	136	129 degrés			le 26	104	112 degrés	31 j.	31 j.
3	8	136	127			24	104	116	31	31
4	20	130	124			8	106	114	31	31
5	1	131	124			24	107	114	31	31
6	13	133	125			22	106	113	31	31
7	9	135	132			6	109	121	31	30

Août.

1772	le 16	140	129 degrés			le 4	106	116 degrés	31 j.	31 j.
3	7	134	130			22	107	119	31	31
4	21	139	131			12	113	122	31	31
5	26	141	127			10	105	115	31	31
6	28	139	130			9	109	119	31	31
7	30	144	135			4	113	126	31	26

Septembre.

1772	le 11	145	137 degrés			le 26	116	126 degrés	30 j.	24 j.
3	6	143	136			10	121	129	30	19
4	26	149	141			5	114	131	30	11
5	23	142	134			10	116	124	30	29
6	21	149	140			29	124	130	30	15
7	28	148	143			3	127	134	30	4

Histoire de 1778. P. I.

h

Octo-

Année.	Jour le plus froid ou le moins chaud.	Froid moyen matin & soir.	Thermometre au dessous de 170 d. 150 d.	Jour le plus chaud ou le moins froid.	Chaleur moyenne à midi	Thermometre au dessus de 150 d. 130 d.
--------	--	---------------------------------	--	--	---------------------------------	---

Octobre.

1772	le 21 151	147 degrés		4 j. le 1 116	135 degrés	31 j.	5 j
3	24 160	146		7 124	139	28	4
4	31 162	149		13 134	142	28	0
5	30 153	140		1 123	135	31	6
6	27 156	147		11 128	141	30	2
7	20 158	149		17 133	143	29	0

Novembre.

1772	le 18 155	146 degrés	0 j.	5 j. le 9 134	142 degrés	29 j.
3	24 172	155	2 19	1 136	151	14
4	19 185	171	16 30	2 148	164	1
5	14 173	157	3 24	4 142	153	12
6	12 172	159	1 29	4 141	152	9
7	27 172	153	1 18	5 139	150	18

Décembre.

1772	le 30 174	156 degrés	1 j.	26 j. le 19 145	152 degrés	12 j.
3	24 181	159	4 29	6 146	153	12
4	30 187	167	11 31	21 149	161	1
5	11 178	162	6 27	3 143	156	6
6	8 172	158	1 29	10 147	154	8
7	31 173	158	2 29	15 144	153	11

Aver-

Avertissement.

Le Thermometre est à mercure & l'échelle divisée selon la méthode de *Delisle*: 0 est le terme de l'eau bouillante & 150 celui de la congélation naturelle.

La 1^{re} Colonne après celle des années contient les moindres élévations du Thermometre, qui répondent aux jours les plus froids en hyver, & les moins chauds en été.

La 2^{de} Colonne marque les froids moyens pour chaque mois des six années. Ce froid moyen se trouve en divisant la somme de toutes les hauteurs du Thermometre observées le matin & le soir par le nombre des observations.

Les deux Colonnes suivantes, c'est à dire la 3^e & la 4^e, indiquent le nombre de jours auxquels le Thermometre est descendu au dessous du 170^e degré & au dessous du terme de la congélation naturelle 150.

La 5^e Colonne donne à connoître les plus grandes élévations du mercure dans le tuyau du Thermometre pour tous les mois des six années, ce qui répond aux jours les plus chauds en été, & les moins froids en hyver.

La 6^e Colonne marque la chaleur moyenne, qui est la somme des hauteurs du Thermometre observées à midi, divisée par le nombre des jours du mois.

Les deux dernieres Colomnes indiquent le nombre des jours auxquels le Thermometre est monté au dessus du point de congélation 150 & au dessus d'une chaleur de 130 degrés.

Etat de l'Athmosphère pour chaque mois des années

1772 — 1777.

Année.	Calmé parfait.	Petit vent.	Vent fort.	Vent très - fort.	Direction du Vent.								Jours fereins.	Jours couverts.	Brouillard.	Pluie.	Neige.
					Nord.	N - E.	Est.	S - E.	Sud.	S - Ou.	Ouest.	N - Ou.					
Janvier.																	
1772	4	7	11	9	3	6	4	3	1	8	3	0	6	14	0	0	13
1773	6	20	3	2	6	14	0	0	0	0	3	7	12	13	5	2	11
1774	5	17	6	3	8	8	2	1	1	4	1	4	10	16	6	0	13
1775	0	12	10	9	10	1	0	4	1	2	6	7	5	18	6	1	12
1776	5	18	5	3	5	6	6	0	0	0	8	5	9	13	3	0	6
1777	1	15	12	3	8	1	3	5	3	2	2	7	6	18	5	1	10
Février.																	
1772	1	16	10	2	9	5	1	0	0	5	4	4	17	6	8	0	10
3	4	12	9	3	9	3	0	3	0	0	4	9	3	18	8	0	11
4	1	11	12	4	5	1	0	0	2	5	5	8	4	16	5	3	12
5	1	9	13	5	4	9	0	0	2	6	4	3	4	17	1	2	13
6	1	14	10	4	1	1	0	6	10	6	4	1	1	16	2	0	17
7	6	16	5	1	11	5	1	1	1	3	3	3	5	14	5	0	16

Année	Calmé parfait.	Petit vent.	Vent fort.	Vent très - fort.	Direction du Vent.								Jours seréins.	Jours couverts.	Brouillard.	Pluie.	Neige.
					Nord.	N - E.	Est.	S - E.	Sud.	S - Ou.	Ouest.	N - Ou.					
Mars.																	
1772	6	13	6	6	12	3	5	2	3	2	3	1	18	5	3	3	6
3	4	14	11	2	8	2	1	2	2	6	2	5	13	10	6	0	9
4	1	18	9	3	5	9	0	0	2	2	2	9	12	12	6	1	10
5	4	16	5	6	5	1	1	0	1	6	6	8	6	14	4	3	15
6	4	16	8	3	9	0	7	1	2	5	5	2	5	15	3	2	16
7	5	15	9	2	7	2	1	7	2	5	3	4	11	8	5	1	15
Avril.																	
1772	3	16	10	1	7	0	1	1	3	8	3	6	9	11	5	10	7
3	13	8	6	3	4	1	0	4	10	6	1	2	16	8	3	4	1
4	6	15	5	4	1	9	0	1	2	3	5	8	13	5	3	8	0
5	3	19	6	2	10	1	0	0	0	3	6	10	11	3	0	4	8
6	4	19	6	1	8	3	4	3	1	1	5	5	10	5	3	6	12
7	7	15	6	2	9	4	0	2	1	3	2	9	9	5	3	6	5
Mai.																	
1772	3	12	9	7	4	11	0	0	0	2	3	10	11	10	3	12	4
3	6	14	9	2	0	3	7	4	2	4	3	5	11	4	1	13	0
4	5	11	11	4	3	1	2	3	5	1	9	3	16	2	2	13	0
5	8	11	9	3	4	2	0	0	1	6	8	10	15	3	1	16	1
6	8	18	5	0	6	4	5	5	4	1	2	4	7	7	5	16	1
7	13	7	8	3	3	1	4	5	5	3	4	5	14	4	1	9	0

Juin.

Année.	Calme parfait.	Petit vent.	Vent fort.	Vent très-fort.	Direction du Vent.								jours serains.	jours couverts.	Brouillard.	Pluie.	Neige.
					Nord.	N-E.	Est	S-E.	Sud.	S-Ou.	Ouest.	N-Ou.					
Juin.																	
1772	5	14	8	3	8	3	0	2	1	3	6	6	6	12	3	12	0
3	3	13	6	8	0	1	9	1	1	5	5	7	10	11	1	14	0
4	10	6	11	3	1	4	2	0	4	1	4	10	11	2	3	11	0
5	5	11	10	4	2	4	2	0	3	6	6	3	9	4	0	13	1
6	6	14	9	1	0	8	8	1	3	2	4	1	14	3	1	8	0
7	6	9	12	3	0	0	6	3	3	2	9	7	10	3	0	13	0
Juillet.																	
1772	9	11	9	2	6	2	14	0	1	0	1	7	16	10	6	9	
3	11	11	5	4	4	2	6	3	1	2	3	8	17	3	3	12	
4	7	12	8	4	2	2	6	2	3	2	5	6	9	5	5	12	
5	10	13	5	3	0	0	7	1	0	3	14	5	14	3	2	12	
6	5	17	8	1	0	8	9	2	5	2	2	1	10	1	5	8	
7	11	11	6	3	0	4	2	5	1	4	8	3	3	5	0	27	
Août.																	
1772	7	20	3	1	1	2	2	2	2	11	4	6	3	18	4	17	
3	7	12	8	4	2	9	1	3	3	2	4	7	11	8	2	15	
4	9	12	7	3	0	1	5	4	6	4	5	4	9	6	2	12	
5	6	17	7	1	0	0	9	2	4	5	11	0	18	3	10	8	
6	5	19	4	3	0	6	2	2	5	4	8	0	10	12	6	17	
7	8	10	9	4	4	5	2	1	0	6	6	3	6	4	2	17	

Année.	Calmes parfait.	Petit vent.	Vent fort.	Vent très-fort.	Direction du Vent.							jours sercins.	jours couverts.	Brouillard.	Pluie.	Neige.
					Nord.	N-E.	Est	S-E.	Sud.	S-Ou.	Ouest.	N-Ou.				

Septembre.

1772	9	9	8	4	0	1	2	4	2	8	8	5	3	12	5	19
3	4	10	9	7	1	6	1	2	4	3	8	3	9	10	5	19
4	2	16	10	2	5	9	3	1	5	3	1	2	6	9	3	8
5	7	12	10	1	1	1	3	2	4	8	6	3	8	8	5	14
6	5	10	11	4	2	0	2	3	2	7	6	6	10	6	5	10
7	4	13	9	4	2	6	5	2	4	7	2	2	5	9	0	19

Octobre.

1772	2	11	15	3	5	2	1	0	0	7	13	3	5	12	3	12	5
3	5	7	14	5	4	2	1	1	11	3	6	3	12	8	7	9	4
4	5	8	13	5	7	2	4	2	1	3	6	4	2	21	5	15	7
5	5	11	8	7	0	0	6	3	5	9	5	3	1	14	9	16	0
6	5	18	7	1	2	1	3	5	6	4	5	4	6	11	3	9	2
7	3	10	13	5	6	0	1	1	5	5	5	8	1	11	0	14	6

Novembre.

1772	8	3	12	7	0	3	2	5	8	7	3	2	5	10	7	15	1
3	5	15	9	1	5	7	2	3	5	5	1	1	11	14	5	6	7
4	3	16	9	2	7	9	4	1	0	1	2	4	5	9	3	0	17
5	5	16	8	1	1	0	4	6	3	6	9	1	3	16	8	8	8
6	7	14	4	5	2	1	2	8	7	2	2	6	4	14	3	1	17
7	7	15	6	2	1	1	5	5	1	8	4	5	0	18	2	3	10

Decem-

Année.	Calmé partait.	Petit vent.	Vent fort.	Vent très-fort.	Direction du Vent.								jours fereins.	jours couverts.	Brouillard.	Pluie.	Neige.
					Nord.	N - E.	Est.	S - E.	Sud.	S - Ou.	Ouest.	N - Ou.					
Décembre.																	
1772	1	18	11	1	6	3	2	3	4	5	3	5	3	15	1	5	15
3	0	20	7	4	5	4	1	2	1	5	9	4	2	17	2	2	14
4	2	12	11	6	7	5	1	2	1	1	2	12	1	14	5	0	17
5	2	16	7	6	8	1	1	4	1	3	5	8	1	17	3	3	19
6	0	14	13	4	1	1	8	3	2	8	5	3	2	19	0	4	15
7	0	16	13	2	7	2	2	7	5	3	1	4	2	22	5	6	9

Ici toutes les colonnes après celle des années marquent le nombre de jours auxquels le vent ou la constitution de l'atmosphère indiquée au dessus a eu lieu.



MORTS.

L'Académie Impériale des Sciences a perdu vers la fin de l'année précédente deux de ses Membres externes universellement regrettés & très dignes de l'être :

Albert de Haller, Chevalier de l'Ordre royal Suédois de l'Étoile polaire, Seigneur de Goumoëns-le-Jux & d'Eclagnes, Président perpétuel de la Société royale de Göttinguen & Membre du Conseil Souverain de la République de Bern, Membre des principales Académies de l'Europe :

Reçu au nombre des Académiciens externes en 1776, le 29 Décembre dans l'Assemblée solennelle par laquelle l'Académie Impériale des Sciences célébra le premier Jubilé demi-séculaire de sa fondation :

Décédé le 1^{er} Décembre 1777 v. St.

Charles de Linné, Chevalier de l'Ordre royal Suédois de l'Étoile polaire, Premier Médecin du Roi de Suede & Professeur de Botanique & de Médecine à Upsala, Membre des principales Académies de l'Europe :

Reçu au nombre des Académiciens externes en 1754 le 12 Juillet :

Décédé le 30 Décembre 1777 v. St.

Leurs noms seuls tiennent lieu d'Eloges & leurs écrits bien mieux que le bronze & l'airain braveront l'injure des âges.

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS

présentées ou communiquées à l'Académie pendant
le cours du premier Sémeſtre de l'Année 1778.

Dans l'assemblée du Lundi 8 Janvier, le Secrétaire de
Conférences a communiqué la lettre de Mr. *Amadeus
Emanuel de Haller* qui notifie la mort de son illustre
pere. (*).

Le Vendredi 12 Janvier, le Secrétaire a lu un
Rapport de Mr. *Jäbrig* (**) qui envoie une herbe mé-
dicinale que les Calmouques nomment *Sergénä* & qu'ils
emploient avec succès contre les douleurs de rhumatisme.

Le 15 Janvier, le Secrétaire a présenté de la part
de Mr. *Jean Bernoulli*, Astronome royal à Berlin, le
troisième Cahier de ses nouvelles littéraires de divers pays.

Mr. le Prof. *Krafft* a communiqué: *Exposition d'une
expérience nouvelle & très curieuse que Mr. Achard, Aca-
démicien*

i 2

(*) Voyés ci dessus pag 66

(**) Histoire de l'Académie A. 1777, dernier Sémeſtre, à l'Article
Médecine, pag. 45.

démicien de Berlin, a faite sur la formation artificielle des cristaux de roche, extraite d'une lettre que ce chymiste habile & laborieux avoit adressée à S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Galitzin*, Envoyé extraordinaire de la Cour Impériale de Russie auprès de Leurs Hautes Puissances les États Généraux de Hollande. Mr. le Directeur ayant souhaité que cette Expérience fut répétée à l'Académie, Mr. le Prof. *Krafft* en a été chargé, & Mr. l'Adjoint *Géorgi* nommé pour l'assister. (*)

Le 19 Janvier, Mr. le Prof. *Pallas* a lu une lettre de Mr. *Häbn*, Sur-Intendant des Mines à *Barnaoul*, qui communique les détails d'un ouragan suivi d'un tremblement de terre, qu'on a essuyé à *Barnaoul* le 2 Nov. 1777, & qui fait encore part de quelques observations sur une contagion de bestiaux, & sur l'état présent des mines dans cette contrée - la. (**)

Les Séances suivantes ont toutes été uniquement occupées par les lectures des mémoires présentés par Messieurs les Académiciens.

Le 9 Février, Mr. le Prof. *Lepechin* a remis de la part de S. E. l'Archêveque de Pétersbourg & Novogorod, *Gabriel*, quelques exemplaires d'une Dissertation latine intitulée *Tentamen medicum de generalioribus in sexu foemineo à graviditate oriundis mutationibus &c. pro gradu Docto-*

(*) Ces expériences n'ont pas réussi, quoique Mr. le Prof. *Krafft* ait scrupuleusement suivi tous les procédés prescrits par l'ingénieur Académicien de Berlin.

(**) Voyez ci-dessus pag. 38.

Doctoratus a Minas Isayev, Porchowow-welico-novo-grado-russo Lugd. Bat. 12 Apr. 1777, pour être distribués à Mrs. les Académiciens Médecins.

— — le même a communiqué une lettre de Mr. *Spielmann* de Strasbourg qui contient diverses nouvelles littéraires.

Le 12 Février, Mr. le Prof. *Pallas* a remis pour le jardin botanique un paquet de différentes semences, qui lui avoient été envoyées de Moscou par Mr. *Procopief Demidof*.

Le 26 Février, le Secrétaire a lu un rapport de Mr. *Jäbrig* qui envoie à l'Académie une traduction allemande de quelques écrits tongouts.

Mr. l'Adjoint *Géorgi* a remis un catalogue imprimé de médailles & monnoyes, dont la vente devoit se faire à Hambourg aux plus offrans.

Le 5 Mars, Mr. le Prof. *Göldenstädt* a lu la lettre de notification de la mort du très célèbre Chevalier de *Linné*, adressée à l'Académie par Mr. *Charles de Linné* son fils. (*)

Mr. le Prof. *Pallas* a communiqué une copie des observations faites par Mr. le Conseiller de Collèges *Lerch* sur les inondations arrivées à St. Pétersbourg par la crue des eaux de la Néva depuis 1741 jusqu'en 1777.

(*) Voyez ci-dessus pag. 66.

Mr. le Prof. *Kraft* a fait part d'une lettre écrite de Berlin sur une nouvelle espece de faitieres propres à garantir de la foudre les toits des bâtimens.

Le 9 Mars, Le Secrétaire a présenté: *Untersuchung warum geimpfte Blattern gelinder und sicherer sind als die natürlichen: aus dem englischen des D. John Mudge, von dem Verfasser des Unterrichts gegen die Kinder-Blattern, nebst einem Anhang &c. 8vo.* Ouvrage envoyé à l'Académie par le Traducteur Mr. *Wolff*, Docteur en Médecine à Danzig.

— — il a lu une lettre de Mr. de *Magellan*, Gentilhomme Portugais établi à Londres, qui communique diverses nouvelles littéraires.

— — Mr. le Prof. *Pallas* a communiqué un plan de souscription pour des Globes, terrestre & céleste, de 15 pouces de diametre, que les Sieurs *Jessenys* & *Hauwood* à Londres ont entrepris de faire.

Le 12 Mars, Mr. le Prof. *Güldenstädt* a présenté le catalogue du Cabinet d'Histoire naturelle que possédoit le défunt Négociant *Saturgus* à Königsberg en Prusse, & que les héritiers souhaitoient de vendre en entier.

Le 19 Mars, le Secrétaire a lu des lettres, de Mr. de *Mage lan* de Londres sur les verres ardents, de Mr. *Schäffer* de Ratisbonne sur ses expériences nouvelles avec l'Electrophore, & de Mrs. *Pneuschen* & *Haas* de Bâle sur la Typométrie des Cartes géographiques, & spécialement sur la Carte imprimée de la Sicile.

Le

Le 23 Mars, Mr. le Directeur a remis de la part de l'Académie impériale & royale des Sciences & belles lettres de Bruxelles: *Mémoire sur les diverses méthodes inventées jusqu'à présent pour garantir les édifices d'incendie, par Mr. l'Abbé Mann, Chanoine. A Bruxelles de l'imprimerie Académique.* Ces intéressant ouvrage a été accompagné d'une lettre de S. F. Mr. le Prince *Dimitri de Galitzin*, Envoyé extraordinaire à la Haye, adressée à Mr. le Directeur, qui sur cela a pris la résolution de faire insérer un extrait détaillé de l'ouvrage dans les Almanachs de l'année prochaine, & construire une maisonette de bois suivant la méthode du Lord Vicomte Mahon, pour faire sur elle publiquement l'expérience de l'incombustibilité.

Le 30 Mars, Mr. le Prof. *Pallas* a présenté de la part de Mr. *de Born*, Conseiller des mines & monnoyes de l'Impératrice-Reine, le troisieme volume des mémoires d'une Société des Sçavans établie en Bohême que Mr. *de Born* publie sous le titre: *Abhandlungen einer Privat-Gesellschaft in Böhmen zum Druck befördert von Ignatz Edeln von Born.*

Le 16 Avril, Mr. *Euler* le pere a fait sçavoir que S. F. Mr. *de Cruë*, Conseiller d'Etat actuel & Médecin du Corps de *Sa Majesté Impériale* lui a envoyé tout l'appareil de barres & autres pieces d'acier trempé, que l'Académie avoit commandé à sa fabrique pour un cours complet d'expériences sur le magnétisme; qu'il a déjà commencé à en aimanter plusieurs pieces & que quelques unes en ont acquis une force magnétique fort supérieure à celle qu'on a été en état de donner jusqu'ici aux barres d'acier.

Le Secrétaire a présenté de la part de Mrs. les Astronomes de *Milan*, les années 1775-76 77 & 78 de leurs éphémérides astronomiques imprimées in 8vo.

Mr. le Prof. *Pallas* a communiqué une lettre, par laquelle Mr. *Heriel*, Candidat en Théologie à Lubec, offre en vente une collection très complète d'insectes & d'autres animaux, qui avoit appartenu au defunt Apoticaire *Edler*.

Mr *Euler* le pere a fait remettre un imprimé sur *l'art de peindre* que lui avoit adressé le Comte de *Rosnays-Cagus* d'Orange, pour le communiquer à l'Académie.

Le 27 Avril, le Secrétaire a remis avec un rapport de Mr. *Jäbrig*, une traduction allemande que celui-ci a faite d'un écrit moungal sur la Chronologie des premiers Patriarches dans les royaumes indiens depuis la propagation du paganisme.

Le 4 Mai, Mr. le Prof. *Pallas* a remis pour le jardin botanique une deuxieme collection contenant 400 paquets de semences de plantes diverses, que Mr. *Procopief Demidof* lui avoit envoyée de Moscou.

Le 7 Mai, le Secrétaire a présenté de la part de la Société de littérature russe établie à Moscou, le 4^{me} volume de ses mémoires, qu'elle publie sous le titre: Опытъ трудовъ вольнаго Россійскаго собранія при Императорскомъ Московскомъ Университетѣ.

— il a lu une lettre de Mr. *Kratzenstein*, Doyen de la faculté de Médecine à Copenhague, qui contient diverses réflexions sur quelques objets de Physique & de Géométrie.

— ensuite une lettre adressée à l'Académie par Mr. *Pabin de Champlin de la Blancherie* qui envoie le Prospectus & un échantillon d'un nouvel ouvrage périodique qui paroitra à Paris tous les 15 jours à compter du mois d'Avril.

— enfin le Prospectus d'un nouveau Systeme de Physique universelle par Mr. *Ignazio Gajone di Castel Monferrato*, que les frères *Raimondi* vont publier à Naples.

Le 11 Mai, le Secrétaire a présenté de la part de Mr. *Preuschen*, Diacre à Carlsruh, une brochure allemande intitulée *Grundrifs der typometrischen Geschichte*, imprimée à Bâle.

Le 25 Mai, le Secrétaire a lu une notification du Haut Sénat dirigeant, concernant un monstre biforme vivant, dont la femme d'un païsan est accouchée dans le Gouvernement de Twer. (*)

Le 11 Juin, Mr. le Prof. *Lepechin* a présenté & distribué aux Académiciens une dissertation inaugurale de *Spiritu ardente ex lacte bubulo*, que Mr. *Nicolas Oseretzkowski*, élève de l'Académie a soutenue à Strasbourg pour être revetû du Grade de Docteur.

(*) Voyez ci-dessus l'Article *Anatomie* pag. 41.

Le 15 Juin, le Secrétaire a présenté de la part de Mr. *Lazare Spallanzani*, Professeur d'histoire naturelle à Pavie ses *Opuscles de physique animale & végétale* traduits de l'Italien par Mr. *Jean Senebier* en deux volumes in 8vo.

— ensuite un Avis imprimé sur la publication du Catalogue du fameux Cabinet impérial-royal de médailles antiques, qui sera imprimé à Vienne par Souscription.

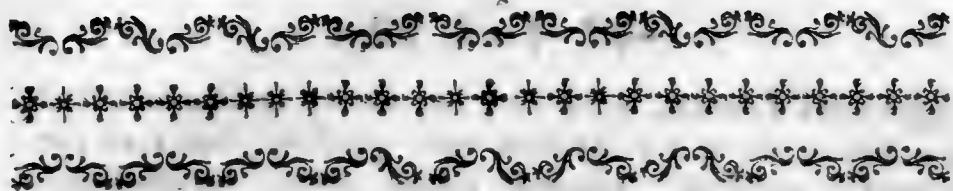
Mr. le Conseiller d'Etat actuel *de Stehlin* a remis le programme de Prix de la Société hollandoise des Sciences de Harlem pour l'année 1778.

Le 18 Juin, le Secrétaire a remis: *An experimental inquiry into the cause of the changes of colours in opaque and coloured bodies*, que l'Auteur Mr. *Edward Hufsey Delaval* Esq. lui avoit adressé pour être présenté de sa part à l'Académie.

Le 22 Juin, le Secrétaire a présenté de la part de Mr. le Colonel *Lorgna*, l'ouvrage que celui-ci a publié à Verone sous le titre: *Memorie intorno all'acque correnti*.

MATHEMATICA:

MATHEMATICA



DE
CORPORIBVS REGVLARIBVS
PER DOCTRINAM SPHAERICAM DETERMINATIS;
VBI SIMVL NOVA METHODVS, GLOBOS SIVE
COELESSES SIVE TERRESTRES CHARTA
OBDVCENDI, TRADITVR.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.



Corpus regulare vocatur Polyedrum circum-
quaque hedris planis regularibus et inter se
aequalibus inclusum, et cuius omnes anguli
solidi a totidem angulis planis formantur. Hedrae ergo
erunt vel triangula aequilatera, vel quadrata, vel pentago-
na regularia, vel etiam hexagona; ad angulos autem soli-
dos constituendos vel ternae hedrae, vel quatuor, vel quin-
que, vel etiam sex concurrunt.

§. 2. In singulis hedris praeter numerum laterum
cuiusque, qui sit $= n$, in computum venire debet quantitas

singulorum laterum, quae fit $=x$, ita vt perimeter cuiusque hedrae fit $=nx$. Deinde quia quaelibet hedra est polygonum regulare, ponatur radius circuli circumscripti $=y$, hincque reperitur area cuiusque hedrae

$$= \frac{1}{2} n x \vee (y y - \frac{1}{4} x x).$$

Denique vocetur radius sphaerae ipsi polyedro circumscriptae $=r$, eritque $\vee (r r - y y)$ perpendicularum ex centro sphaerae in quamlibet hedram demissum, cuius pars tertia in aream hedrae ducta et per numerum omnium hedrarum multiplicata dabit soliditatem totius polyedri seu corporis regularis. Ita si numerus omnium hedrarum fuerit $=N$, erit superficies polyedri $=\frac{1}{2} N n x \vee (y y - \frac{1}{4} x x)$, tota autem soliditas $=\frac{1}{3} N n x \vee (y y - \frac{1}{4} x x) (r r - y y)$. Hinc si fuerit superficies $=S$, erit haec soliditas

$$= \frac{1}{3} S \vee (r r - y y).$$

§. 3. Concipiatur igitur corpori regulari sphaera circumscripta, cuius radium vocauimus $=r$, et omnes anguli solidi reperientur in superficie sphaerae, qui si arcubus circulorum maximorum iungantur, cuilibet hedrae in superficie sphaerae respondebit polygonum sphaericum regulare totidem laterum n ; hocque modo tota superficies sphaerae, quae est $=4 \pi r r$, diuidetur in tot huiusmodi polygona regularia sphaerica quot habentur hedrae, quarum numerus cum sit $=N$, area cuiusque horum Polygonorum sphaericorum erit $=\frac{4 \pi r r}{N}$.

§. 4. Quando ergo ternae hedrae planae ad angulos solidos constituendos concurrunt, tum in superficie sphaerica etiam ternae hedrae sphaericae in singulis angulis solidis conuenient; vnde patet in his polygonis sphaericis

ricis singulos angulos fore $= 120$ gr. Sin autem quaternae hedrae planae in angulis solidis concurrant, in hedris sphaericis omnes anguli debent esse recti seu 90 graduum. At si quinae hedrae planae concurrant, in hedris sphaericis singuli anguli erunt 72 gr. Denique si adeo sex hedrae planae conueniant, in polygonis sphaericis singuli anguli erunt 60 gr. Ulterius enim progredi ipsa rei natura prohibet.

§. 5. His praemissis omnes casus, qui quidem occurrere possunt, seorsim euoluamus. Ac primo quidem sint omnes hedrae triangulares, quarum vel ternae, vel quaternae, vel quinae, vel senae in singulis angulis solidis concurrere possunt: secundo pro hedris quadrangularibus vel ternae, vel etiam quaternae concurrere poterunt: pro pentagonis autem plures quam tres occurrere non posse manifestum est, quod multo magis pro hexagonis valet.

Casus Primus.

Pro hedris triangularibus, quarum ternae in angulis solidis occurrunt.

§. 6. Hic igitur est $n = 3$, sitque in superficie Tab. I. sphaerica triangulum sphaericum $A B C$ cuique hedrae Fig. 1. planae respondens, et quia eius singuli anguli A, B, C debent esse $= 120^\circ$ eorum summa fit $360^\circ = 2\pi$, unde eius area colligitur $= \pi r r$, quae cum etiam sit $= \frac{4\pi r r}{N}$, erit $N = 4$. Hinc patet quatuor tantum hedras requiri ad hoc corpus regulare formandum, unde etiam istud corpus regulare Tetraedron appellatur. Quia ergo omnium angulorum planorum numerus est $= 12$, terni autem in singulis angulis solidis concurrant, angulorum solidorum numerus quoque erit $= 4$.

§. 7. Iam quia in triangulo sphaerico $A B C$ dantur omnes anguli $A = B = C = 120$ gr. inde etiam latera definiri poterunt per regulas trigonometriae sphaericae. Si enim terni anguli fuerint α , β et γ , et latera ipsis opposita a , b et c , erit

$$\cos. a = \frac{\cos. \alpha + \cos. \beta \cdot \cos. \gamma}{\sin. \beta \cdot \sin. \gamma}$$

et quia omnes anguli sunt inter se aequales, erit

$$\cos. a = \frac{\cos. \alpha + \cos. \alpha^2}{\sin. \alpha^2} = \frac{\cos. \alpha}{1 - \cos. \alpha}$$

Quoniam igitur nostro casu est $\alpha = 120$ gr. erit $\cos. \alpha = -\frac{1}{2}$, ideoque $\cos. a = -\frac{1}{3}$; vnde intelligitur, singula latera $A B = A C = B C$ esse quadrante maiora, ita vt excessus cuiusque supra 90 gr. sinus sit $= \frac{1}{3}$, vnde iam vnum latus erit $= 109^\circ. 28'$; quare cum latus hedrae planae x sit subtensa arcus $A B$ erit $\frac{x}{2r} = \sin. \frac{1}{2} a$. Est vero

$$\sin. \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos. a}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

hinc ergo colligimus latus cuiusque hedrae $x = 2r \sqrt{\frac{2}{3}}$.

§. 8. Vt autem simul etiam radium circuli hedrae planae circumscripti y inuestigemus, consideremus centrum hedrae nostrae sphaericae, quod sit in O , ex quo, ductis arcibus $O A$ et $O B$, in latus $A B$ demittamus perpendicularum $O P$, latus $B A$ in P bisecans, eritque

$$\frac{x}{2r} = \sin. A P \text{ et } \frac{y}{r} = \sin. O A.$$

Quod si ergo in genere ponamus angulum $P A O = \alpha$ et angulum $A O P = \beta$, ob angulum $A P O$ rectum, erit

$$\cos. A P = \frac{\cos. \beta}{\sin. \alpha} \text{ et } \cos. O A = \cot. \alpha \cdot \cot. \beta.$$

Nostro autem casu est $\alpha = 60$ gr. et $\beta = 60$ gr. hinc

$$\sin. \alpha = \sin. \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos. \alpha = \cos. \beta = \frac{1}{2} \text{ et } \cot. \alpha = \cot. \beta = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

vnde

vnde colligitur $\cos. AP = \frac{1}{\sqrt{3}}$, et $\cos. OA = \frac{1}{3}$, hincque
 $\sin. AP = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{x}{2r}$ et $\sin. OA = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{y}{r}$. Pro nostro
 igitur casu obtinetur latus hedrae $x = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$ et radius
 circuli circumscripti $y = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

§. 9. Ex his pro x et y inuentis valoribus sequi-
 tur fore, $\sqrt{(yy - \frac{1}{4}xx)} = \frac{r\sqrt{2}}{3}$ et $\sqrt{(rr - yy)} = \frac{r}{3}$; vnde
 pro tetraëdro, sphaerae, cuius radius $= r$, inscripto, sequen-
 tes nanciscimur determinationes, quas simul in fractionibus
 decimalibus adiungamus:

I. Latus hedrae	$= 2r\sqrt{\frac{2}{3}} = 1,632993.r$
II. Radius circuli hedrae circumscripti	$= \frac{2r\sqrt{3}}{3} = 0,942809.r$
III. Area cuiusque hedrae	$= \frac{2rr}{\sqrt{3}} = 1,154701.rr$
IV. Superficies tetraëdri	$= \frac{4rr}{\sqrt{3}} = 4,618804.rr$
V. Soliditas tetraëdri	$= \frac{4r^3}{9\sqrt{3}} = 0,513200.r^3.$

Casus Secundus.

Pro hedris triangularibus, quarum quaternae in an-
 gulis solidis concurrunt.

§. 10. Hic ergo est iterum $n = 3$, sitque in su-
 perficie sphaerica triangulum sphaericum ABC cuique
 hedrae respondens, et quia quatuor coniunguntur, quilibet an-
 gulus erit quarta pars totius peripheriae, ideoque $= \frac{\pi}{3}$,
 vnde summa trium angulorum erit $270 \text{ gr.} = \frac{3\pi}{2}$. Huius
 igitur trianguli sphaerici area erit $= \frac{\pi rr}{2}$, quae in rota su-
 perficie sphaerae octies continetur, ita ut hoc Polyedrum
 constet octo haedris triangularibus, ideoque fiat $N = 8$; vn-
 de

de tiam Oſtaedron vocari ſolet. Quia ergo numerus angulorum planorum eſt 24, quorum quaterni occurrunt in ſingulis angulis ſolidis, numerus angulorum ſolidorum erit = 6.

§. 11. Sit nunc iterum O centrum trianguli ſphaerici, ex quo in latus A B demittatur perpendicularum O P, vt obtineatur $\frac{x}{r} = \sin. AP$ & $\frac{y}{r} = \sin. OA$. Quia nunc in triangulo A O P eſt $\alpha = 45$ gr. & $\beta = 60$ gr. erit $\sin. \alpha = \cos. \alpha = \frac{r}{\sqrt{2}}$ et $\cot. \alpha = 1$; tum vero erit vt ante $\sin. \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos. \beta = \frac{1}{2}$ & $\cot. \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$; vnde ex formulis ſuperioribus colligitur $\cos. AP = \frac{\cos. \beta}{\sin. \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ideoque $\sin. AP = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{r}$; porro $\cos. OA = \cot. \alpha \cot. \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, hincque $\sin. OA = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{y}{r}$, ideoque $x = r \sqrt{2}$ & $y = r \sqrt{\frac{2}{3}}$; ex quibus valoribus colligimus $\sqrt{(y y - \frac{1}{3} x x)} = \frac{r}{\sqrt{6}}$ et $\sqrt{(r r - y y)} = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

§. 12. Ex his autem valoribus pro oſtaedro ſequentes naſcuntur determinationes:

I. Latus hedrae = $r \sqrt{2} = 1,414214. r$

II. Radius circuli = $r \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816496. r$

III. Area hedrae = $\frac{r r \sqrt{3}}{2} = 0,866025. r r$

IV. Superficies } oſtaedri = $4 r r \sqrt{3} = 6,928203. r r$

V. Soliditas } = $\frac{4 r^3}{3} = 1,333333. r^3$

Caſus Tertius.

Pro hedris triangularibus, quarum quinae in angulis ſolidis concurunt.

§. 13. Hic ergo iterum eſt $n = 3$, ac in triangulo ſphaerico A B C ſinguli anguli erunt = $\frac{360}{5} = 72$ gr. vnde

Vnde summa angulorum $= 216 = \frac{6\pi}{5}$. Hinc area trianguli sphaerici erit $= \frac{\pi r r}{5}$, quae cum sit vices minor quam tota superficies sphaerae, hoc polyedron constabit ex viginti hedris, ita vt sit $N = 20$, vnde hoc corpus Icosaedron appellari solet. Quia porro omnino 60 anguli plani adsunt, quorum quini in angulum solidum coeunt, numerus angulorum solidorum erit $= 12$.

§. 14. Iam in triangulo sphaerae rectangulo A O P erit angulus $\alpha = 36$ gr. manente $\xi = 60$ gr. Cum igitur constet esse

$$\text{cos. } \alpha = \sin 54 \text{ gr.} = \frac{\sqrt{5+1}}{2} \text{ erit}$$

$$\sin. \alpha = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \text{ hinc}$$

$$\begin{aligned} \text{cot. } \alpha &= \frac{\sqrt{5+1}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{4}{\sqrt{(80-22\sqrt{5})}} = \frac{1}{\sqrt{(5-2\sqrt{5})}} \\ &= \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}. \end{aligned}$$

tum vero vt ante erit

$$\text{cos. } \xi = \frac{1}{2} \text{ \& cot. } \xi = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hinc igitur fiet

$$\text{cos. A P} = \frac{2}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}, \text{ vnde colligitur}$$

$$\sin. A P^2 = \frac{(6-2\sqrt{5})}{10-2\sqrt{5}} = \frac{40-8\sqrt{5}}{80} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}, \text{ ideoque}$$

$$\sin. A P = \frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{10}} = \frac{x}{2r}, \text{ vnde fit}$$

$$x = \frac{2r\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}. \text{ Deinde vero cum sit}$$

$$\text{cos. O A} = \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}} \text{ erit}$$

$$\sinus O A = \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}} = \frac{y}{r}$$

$$\text{hinc } y = \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$$

§. 15. Cum igitur fit

$$\frac{1}{2} x = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}, \text{ erit } \frac{1}{4} x x = \frac{rr(5-\sqrt{5})}{10},$$

quod subtractum ab

$$y y = \frac{rr(10-2\sqrt{5})}{15} \text{ relinquit}$$

$$\frac{(5-\sqrt{5})}{30} rr; \text{ ficque erit } \sqrt{yy - \frac{1}{4}xx} = \frac{r\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{30}}.$$

Deinde vero erit

$$rr - yy = \frac{(5+2\sqrt{5})}{15} rr \text{ ideoque}$$

$$\sqrt{rr - yy} = \frac{r\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$$

hinc igitur fiet

$$\begin{aligned} x \sqrt{yy - \frac{1}{4}xx} &= \frac{rr\sqrt{(60-20\sqrt{5})}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}} = \frac{rr\sqrt{(6-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}} \\ &= \frac{rr\sqrt{(5-1)}}{\sqrt{15}}. \end{aligned}$$

§. 16. Hinc igitur pro Icosaëdro sequentes nanciscimur determinaciones:

- | | | |
|--------------------|--|------------------|
| I. Latus hedrae | $= \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$ | $= 1,051462. r$ |
| II. Radius circuli | $= \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}$ | $= 0,607062. r$ |
| III. Area hedrae | $= \frac{3rr(5-\sqrt{5})}{10\sqrt{3}}$ | $= 0,478727. rr$ |
| IV. Superficies | $= \frac{6rr(5-\sqrt{5})}{\sqrt{3}}$ | $= 9,574542. rr$ |
| V. Soliditas | $= \frac{2r^3\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{3}$ | $= 2,536150 r^3$ |

Pro harum formularum evolutione numerica notasse iuuabit, esse $\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 4 \text{ fin. } 36 \text{ gr.}$, $\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 4 \text{ cof. } 18 \text{ gr.} = 4 \text{ fin. } 72 \text{ gr.}$ et $5-\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \text{ fin. } 18 \text{ gr.}$ praeterea pro hedris triangularibus semper esse $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Casus Quartus.

Pro hedris triangularibus, quarum sex in angulis solidis concurrunt.

§. 17. Quia hic sex anguli plani concurrunt, in hedris sphaericis singuli anguli erunt $\frac{360}{6} \text{ gr.} = 60 \text{ gr.}$, quorum summa in quolibet triangulo cum sit $180 \text{ gr.} = \pi$, area horum triangulorum euanescit et numerus hedrarum fiet infinitus. Scilicet tota superficies sphaerica in infinita triangula diuisa concipi potest, ita vt ipsa sphaera hoc corpus regulare exhibeat, cuius superficies est

$$= 4 \pi r r = 12, 56637060. r r,$$

soliditas vero $= \frac{4}{3} \pi r^3 = 4, 18879020. r^3$; vnde intelligitur, sphaeram merito inter corpora regularia numerari. Manifestum autem est simili modo superficiem sphaerae etiam in innumera quadrata, vel etiam hexogona regularia, diuisam concipi posse.

Casus Quintus.

Pro hedris quadratis, quarum ternae in angulis solidis concurrunt.

§. 18. Hic igitur est $n = 4$ et cuilibet hedrae quadratae planae in superficie sphaerica respondet quadri-lineum sphaericum A B C D, cuius singuli anguli erunt $= 120 \text{ gr.} = \frac{2}{3} \pi$, quoniam tres tales anguli totam peripheriam complere debent. Hinc summa quatuor angulorum erit $= \frac{8}{3} \pi$, vnde, ablatis 2π , remanent $\frac{2}{3} \pi$, ita vt area futura sit $= \frac{2}{3} \pi r r$, quae in tota superficie sphaerae sexies continetur, ita vt hoc polyëdron ex sex hedris planis quadratis formetur, vnde etiam Hexaëdron vocatur, quae denominatio cum cubo congruit. Quia igitur in iis dantur 24 anguli plani, eo-

Tab. I.
Fig. 2.

rumque terni in singulis angulis solidis concurrunt, numerus angulorum solidorum erit = 8.

§. 19. Sit nunc punctum O centrum cuiusque hedrae sphaericae A B C D, vnde ad vnum angulum A ducto arcu O A et demisso in latus A B perpendiculari O P, in triangulo O A P debet esse

$$\sin. AP = \frac{x}{2r} \text{ et } \sin. AO = \frac{y}{r}.$$

Quia nunc angulus

$$\alpha = 60 \text{ gr. et } \xi = 45, \text{ fit } \sin. \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos. \alpha = \frac{1}{2}, \cot. \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\sin. \xi = \cos. \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \cot. \xi = 1.$$

Hinc igitur ex regulis supra datis colligimus

$$\cos. AP = \frac{\cos. \xi}{\sin. \alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ et}$$

$$\cos. AO = \cot. \alpha \cdot \cot. \xi = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hinc ergo porro fit

$$\sin. AP = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{2r} \text{ et } \sin. AO = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{y}{r},$$

vnde habebimus

$$x = \frac{2r}{\sqrt{3}} \text{ et } y = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

sicque colligetur

$$\sqrt{(yy - \frac{1}{4}xx)} = \frac{r}{\sqrt{3}} \text{ et } \sqrt{(rr - yy)} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

§. 20. Ex his ergo valoribus pro Hexaëdro seu cubo sequentes adipiscimur valores:

I. Latus hedrae $= \frac{2r}{\sqrt{3}} = 1,154700.r$

II. Radius circuli $= \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 0,816496.r$

III. Area

$$\begin{aligned} \text{III. Area hedrae} &= \frac{4rr}{3} = 1,333333.rr \\ \text{IV. Superficies} &= 8rr = 8,000000.rr \\ \text{V. Soliditas} &= \frac{8r^3}{3\sqrt{3}} = 1,539600r^3 \end{aligned}$$

Casus Sextus.

Pro hedris pentagonis, quarum ternae in angulis solidis concurrunt.

§. 21. Hic igitur est $n=5$, et singuli anguli hedrae sphaericae pentagonae iterum erunt $120 \text{ gr.} = \frac{2\pi}{3}$, et talium quinque angulorum summa erit $\frac{10\pi}{3}$, vnde, ablatis 3π , remanet $\frac{\pi}{3}$. Hinc area erit $\frac{\pi rr}{3}$, quae in tota superficie sphaerae duodecies continetur, sicque hoc corpus formabitur ex duodecim hedris pentagonis, vnde etiam Dodecaedron appellari solet, et quia omnino dantur $5.12=60$ anguli plani, eorumque terni in angulis solidis coeunt, numerus angulorum solidorum erit $=20$.

§. 22. Si hic vt haecenus constituatur triangulum sphaericum rectangulum O A P, erit angulus $\alpha = 60 \text{ gr.}$ et $\xi = 36 \text{ gr.}$ vnde habetur

$$\begin{aligned} \sin. \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \cot. \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \sin. \xi &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \cos. \xi = \frac{\sqrt{5+1}}{4} \text{ et} \\ \cot. \xi &= \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

hincque colligimus

$$\begin{aligned} \cos. A P &= \frac{\cos. \xi}{\sin. \alpha} = \frac{\sqrt{5+1}}{2\sqrt{3}} \text{ et} \\ \cos. O A &= \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}, \end{aligned}$$

vnde fit

fin. A P = $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{x}{r}$, ideoque

$$x = \frac{r\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{r\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}},$$

vbi notetur esse $\sqrt{5}-1=4$ fin. 18 gr.
tum vero erit

fin. O A = $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}} = \frac{y}{r}$ ideoque

$$y = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}},$$

vbi notetur esse $\sqrt{10-2\sqrt{5}}=4$ fin. 36 gr. Ex his
autem colligitur

$$\sqrt{yy - \frac{1}{4}xx} = \frac{r\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{15}}$$

(vbi notasse iunabit esse $\sqrt{10+2\sqrt{5}}=4$ cos. 18 gr.) et

$$\sqrt{rr - yy} = \frac{r\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}},$$

tum autem erit

$$x\sqrt{yy - \frac{1}{4}xx} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{3\sqrt{5}}.$$

§. 23. Hinc igitur pro dodecaedro, Sphaerae, cuius radius = r , inscripto sequentes inuenimus determinationes:

I. Latus hedrae = $\frac{r\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}} = 0,713644 r$

II. Radius circuli = $\frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}} = 0,607062 r$

III. Area hedrae = $rr \frac{6}{5} \sqrt{10-2\sqrt{5}} = 0,876218 rr$

IV. Superficies = $2 rr \sqrt{5} \cdot \sqrt{10-2\sqrt{5}} = 10,514616 rr$

V. Soliditas = $\frac{2 r^3 (5+\sqrt{5})}{3\sqrt{3}} = 2,785164 r^3$

pro ultimo valore notetur esse $5+\sqrt{5}=4\sqrt{5}$ fin. 54. gr.

§. 24. Sic igitur nacti sumus quinque illa corpora regularia, quorum inuestigatio vulgo laborem non parum

rum moleſtum, atque imprimis figuras maxime intricatas, requirere ſolet, quorum naturam hic tam facile et prope- modum ſine figuris ex theoria ſphaerica deduximus, vnde ſimul patet ipſi ſphaerae ſextum locum merito concedi. Quo autem ea facilius inter ſe comparare liceat omnes eorum determinationes hic iunctim conſpectui exponamus:

Corpus re- gulare.	Latus cu- iusque hedrae.	Radius circl. cir- cumſcripti	Area vnus hedrae.	Superficies tota.	Soliditas corporis.
Tetraëdron.	1,63299r	0,94281r	1,15470rr	4,61880rr	0,51320r ^s
Octaëdron.	1,41421r	0,81650r	0,86602rr	6,92820rr	1,33333r ^s
Icoſaëdron.	1,05146r	0,60706r	0,47873rr	9,57454rr	2,53615r ^s
Hexaëdron.	1,15470r	0,81650r	1,33333rr	8,00000rr	1,53960r ^s
Dodecaëdron.	0,71364r	0,60706r	0,87622rr	10,51462rr	2,78516r ^s
Sphaera.	0,00000r	1,00000r	0,00000rr	12,56637rr	4,18870r ^s

§. 25. Hinc igitur, patet Dodecaëdron prae reli-
liquis tam maximam ſuperficiem quam ſoliditatem habere,
vnde merito ſuſpicari licet, totam ſphaerae ſuperficiem
commodiſſime duodecim pentagonis planis obduci poſſe.
Eti enim ſuperficies ſphaerica nullo modo figuris pla-
nis, niſi ſint quam minimae, exacte repraeſentari po-
teſt: tamen nouimus, ſphaeras per lacinias chartaceas,
quae in polis coeant, ſatis accurate obduci ſolere, dum
ſcilicet charta aliquantillum in medio ſe expandi patitur,
ita vt quampiam gibboſitatem recipiat convexitati ſphae-
rae conuenientem. Talem igitur effectum multo magis in
pentagonis chartaceis exſpectare licebit, hicque modus vul-
gari longe antefereendus videtur, ideo quod hic nuſquam plu-
res tribus anguli plani ſint iungendi, cum more ſolito ad
minimum

minimum duodecim laciniae in polis concurrere debeant, id quod plerumque sine infigni vitio vix praestare licet.

§. 26. Operae igitur pretium erit inuestigare, quam exacte duodecim illa pentagona, in quae superficies globi ab inscripto Dodecaëdro diuiditur, figuris planis obduci queant; Hunc in finem primo omnes dimensiones vnus pentagoni sphaerici accurate determinemus, vbi quidem sufficiet vnicum sectorem $A O B$ condiderasse, existente scilicet centro talis pentagoni in puncto O , et radio sphaerae manente perpetuo $= r$. Hic igitur demisso perpendicularo $O P$ erunt anguli $\alpha = 60^\circ$ et $\beta = 36^\circ$, area vero talis pentagoni supra est inuenta $\frac{\pi r r}{3} = 1,0471975. rr$: tantam igitur etiam aream figura plana inducenda recipere debet.

§. 27. Nunc more solito triangulum sphaericum $A O P$ euoluamus, ope formularum $\text{cof. } A P = \frac{\text{cof. } \beta}{\sin. \alpha}$ et $\text{cof. } O A = \cot. \alpha. \cot. \beta$

$a \text{ l. cof. } \beta = 9,9079576$ subtr. $\text{l. fin. } \alpha = 9,9375306$ <hr/> $\text{l. cof. } A P = 9,9704270$ ergo $A P = 20^\circ. 54'. 19''$ sive $A P = 75259''$ <hr/> $\text{ad. l. } A P = 4,8765584$ adde $= 4,6855749$ <hr/> $9,5621333$ Arcus $A P = 0,3648660.r$	$\text{ad. l. cot. } \beta = 10,1387390$ adde $\text{l. cot. } \alpha = 9,614394$ <hr/> $\text{l. cof. } O A = 9,9001784$ hinc $O A = 37^\circ. 22'. 38''$ sive $O A = 134558''$ <hr/> $\text{ad. l. } O A = 5,1289095$ adde $= 4,6855749$ <hr/> $9,8144844$ Arcus $O A = 0,6523556.r$
--	--

§. 28. Eodem modo etiam computemus quantitatem arcus OP ex formula

$$\cos. OP = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \beta}, \text{ vt sequitur}$$

a $\log. \cos. \alpha = 9,6989700$	ad $\log. OP = 5,0576014$
subtr. $\log. \sin. \beta = 9,7692187$	adde $4,6855749$
<hr/>	<hr/>
$\log. \cos. OP = 9,9297513$	$9,7431763$
ergo $OP = 31^\circ. 43'. 3''$	Arcus $OP = 0,5535749.r$
siue $OP = 114183 \text{ sec.}$	

§. 29. Consideremus nunc pari modo pentagonum regulare planum, seu potius tantum eius partem quintam, vni lateri respondentem $ao b$, cuius latus sit ab , centrum circuli circumscripti o , eiusque radius oa , qui, quia tanquam incognitus spectari debet, ponatur $oa = z$, ac demisso ex o in latus ab perpendicularo op , ob angulum $aop = 36 \text{ gr.}$ erit $ap = z \sin. 36 \text{ gr.}$ et $op = z \cos. 36 \text{ gr.}$ ideoque $ap = 0,5877853.z$ et $op = 0,8090170.z$; area vero trianguli aop erit $= 0,2377671.zz$

Tab. I.
Fig. 2.

§. 30. Quia autem in hac figura angulus oap est tantum 54 gr. dum in sphaera erat 60 gr. , eo angulus sphaericus neutiquam obtegi poterit, sed nimis paruus est 6 gradibus. Ad hunc ergo defectum supplendum lateri ab adiungatur segmentum circulare $a\pi b$, cuius arcus cum chorda faciat angulum $pa\pi = 6 \text{ gr.}$ vt fiat angulus $oap = 60 \text{ gr.}$ angulo scilicet OAP obtegendo aptus. Huius arcus centrum sit in v , ductaque recta $va = v\pi$, ob angulum $va\pi = 90$, erit angulus $av\pi = 6 \text{ gr.}$; quare si ponamus $va = v$, erit $\frac{ap}{v} = \sin. 6 \text{ gr.}$ ideoque

$$v = \frac{ap}{\sin. 6 \text{ gr.}} = \frac{z \sin. 36 \text{ gr.}}{\sin. 6 \text{ gr.}}$$

Vnde fit $v = 5,6232078.z$ et $l. \frac{v}{z} = 0,7499841$.

Cum igitur arcus $a\pi$ contineat 6 gr. $= \frac{\pi}{30}$, eius quantitas erit $a\pi = \frac{\pi}{30} v = 0,5888643.z$, qui si ducatur in $\frac{1}{2} v$, prodibit area sectoris $av\pi = 1,655652.z^2$. Hinc auferatur area trianguli $vpa = \frac{1}{2} ap.vp = \frac{1}{2} v \sin. 6 \text{ gr. } v \cos. 6 \text{ gr.} = \frac{1}{4} v v \sin. 12 \text{ gr.} = 1,643566.z^2$, et remanebit area semi-segmenti $\pi ap = 0,012086.z^2$, quae addita ad aream trianguli $opa = 0,237767.zz$ producet aream trilinei

$$o a \pi = 0,249853.zz$$

quae decies sumta dabit aream totius figurae planae quam quaerimus $= 2,49863.zz$. Denique cum fit

$vp = v \cos. 6 \text{ gr.} = 5,592403$, haec linea a $v\pi = v$ subducta relinquet sagittam $p\pi = 0,030804$, vnde fit recta $o\pi = 0,839821.z$

§. 31. Omnes igitur has determinaciones, quas tam pro figura sphaerica quam pro figura plana inuenimus, ita repraesentemus, vt vno obtutu percipi queant

Pro Pentagono sphaerico	Pro Pentagono plano.
$OA = 0,6523556.r$	$oa = z$
$AP = 0,3648660.r$	$a\pi = 0,5888643.z$
$OP = 0,5535749.r$	$o\pi = 0,8398210.z$
tota area $= 1,0471975.r^2$	tota area $= 2,49863.zz$

§. 32. Vt nunc hae duae figurae satis exacte inter se congruere queant, dum scilicet charta circa medium o aliquantillum expanditur, quod humectatione facillime obtinetur, manifestum est, extremitates, vbi talis expansio locum non habet, exacte inter se conuenire debere, ita vt fiat $a\pi = AP$ sine $0,5888643.z = 0,3648660.r$, vnde colligitur

$$z = \frac{0,3648660.r}{0,5888643} = 0,6196096.r \text{ et } \frac{1z}{r} = 9,7921125$$

hoc

hoc igitur valore substituto praecedentes determinationes ad sequentes valores reducentur:

Pro Pentagono sphaerico	Pro Pentagono plano.
$A O = 0,6523556.r$	$o a = 0,6196097.r$
$A P = 0,3648612.r$	$a \pi = 0,3648612.r$
$O P = 0,535749.r$	$o \pi = 0,5175824.r$
tota area $= 1,0471975.rr$	tota area $= 0,9591895.rr$

Vnde apparet per expansionem chartae rectam $o a$ incrementum capere debere $= 0,0327459.r$, quod est fere vicesima pars totius longitudinis; at vero recta $o \pi$ capere debet incrementum $0,0359925.r$, quod valet circiter partem decimam quartam; denique totius superficiei incrementum erit $= 0,0880080$, quae est pars fere vndecima: tantam autem expansionem chartam recipere posse experientia fatis declarat, hinc itaque sequens problema commode resolvere poterimus.

Problema.

Superficiem dati globi per duodecim pentagona plana quam fieri potest exactissime obducere.

Solutio.

Sit radius globi dati $= r$, et in plano describatur circulus radio $z = 0,6196097.r$, cui inscribatur pentagonum regulare, super cuius singulis lateribus adiungantur segmenta circularia $a \pi b$ radio

$$= v = 5,6232078.z = 3,484114.r$$

tum huiusmodi duodecim pentagona accurate ex charta excindantur, iisque ternis ad angulos coniungendis superficies globi satis perfecte obtegi poterit.

DILVCIDATIONES
SVPER METHODO ELEGANTISSIMA,
QVA ILLVSTRIS DE LA GRANGE
VSVS EST
IN INTEGRANDA AEQVATIONE DIFFERENTIALI

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{du}{\sqrt{y}}.$$

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Postquam diu et multum in perscrutanda aequatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$ desudassem, atque imprimis in methodum *directam*, quae via facili ac plana ad eius integrale perduceret, nequicquam inquisiuissem; penitus obstupui, cum mihi nunciaretur, in volumine quarto *Miscellaneorum Taurinensium* ab Illustri de la Grange talem methodum esse expositam, cuius ope pro casu, quo

$$X = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4 \text{ et}$$

$$Y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4$$

propositae aequationis differentialis hoc integrale algebraicum atque adeo completum felicissimo successu elicuit.

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} = \sqrt{\Delta + D(x + y) + E(x + y)^2}$$

vbi Δ denotat quantitatem constantem arbitrariam per integrationem ingressam.

§. 2. Istud autem egregium inuentum eo magis sum admiratus, quod equidem semper putaueram, talem methodum in inuestigando idoneo factore, quo aequatio proposita integrabilis redderetur, quaeri oportere, cum vulgo omnis methodus integrandi vel in separatione variabilium, vel in idoneo multiplicatore contineri videatur, etiam si certis casibus quoque ipsa differentiatio ad integrale perducere queat, quemadmodum tam a me ipso quam ab aliis per plurima exempla est ostensum. Ad hanc autem tertiam viam illa ipsa methodus *Grangiana* rite referri posse videtur.

§. 3. Quanquam autem facile est inuentis aliquid addere, tamen in re tam ardua plurimum intererit, hanc methodum ab Illustri *la Grange* adhibitam accuratius perpendisse atque ad vsum analyticum magis accommodasse; siquidem totum negotium multo facilius ac simplicius expediri posse videtur; quamobrem, quae de hoc argumento, quod merito maximi momenti est censendum, sum meditatus, hic data opera fufius sum expositurus.

§. 4. Quoniam autem hoc integrale ab Illustri *la Grange* inuentum, ab iis formis quas ipse olim dederam, plurimum discrepat, ac simplicitate non mediocriter antecellit, ante omnia visum est scitari, quomodo aequationi differentiali satisfaciatur. Hunc in finem pono breu. gr. $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = V$, vt habeam

$$\frac{v}{x-y} = \sqrt{(\Delta + D(x+y) + E(x+y)^2)},$$

quam aequationem ita differentiare oportet, vt constans arbitraria Δ ex differentiali excedat. Sumtis igitur quadratis erit

$\frac{v^2}{(x-y)^2} = \Delta + D(x+y) + E(x+y)^2$, quae differentiata dat

$$\frac{2v dv}{(x-y)^2} - \frac{2vV(dx-dy)}{(x-y)^3} - D(dx+dy) - 2E(x+y)(dx+dy) = 0.$$

§. 5. Quo nunc calculus planior reddatur, seorsim partes vel per dx vel per dy affectas inuestigemus. Pro elemento igitur dx , si y ut constans spectetur, erit

$$dV = \frac{X^1 dx}{2\sqrt{X}},$$

unde singulae partes ita se habebunt:

$$dx \left(\frac{vX^1}{(x-y)^2\sqrt{X}} - \frac{2vV}{(x-y)^3} - D - 2E(x+y) \right)$$

vbi notetur esse $V = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$, hincque

$$VV\sqrt{X} = (X+Y)\sqrt{X} + 2X\sqrt{Y}$$

unde hic duplicis generis termini occurrunt, dum vel per \sqrt{X} vel per \sqrt{Y} sunt affecti. Duo autem termini adsunt \sqrt{Y} affecti, qui sunt

$$- \frac{4X\sqrt{Y}}{(x-y)^3} + \frac{X^1\sqrt{Y}}{(x-y)^2},$$

qui ergo iunctim sumti dabunt

$$\frac{\sqrt{Y}}{(x-y)^3} (X^1(x-y) - 4X),$$

quae forma ob

$$X = A + Bx + Cxx + Dx^2 + Ex^3, \text{ hincque}$$

$$X^1 = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^2, \text{ dabit}$$

$$X^1(x-y) - 4X = -4A - B(3x+y)$$

$$- 2C(xx + xy) - D(x^3 + 3xx^2y) - 4Ex^3y$$

Termini autem per \sqrt{x} affecti sunt

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-y)^3} (X^1(x-y) - 2(X+Y) - D(x-y)^3 - 2E(x+y)(x-y)^2).$$

Cum

Cum igitur sit

$$X + Y = 2A + B(x+y) + C(x^2 + y^2) \\ + D(x^3 + y^3) + E(x^4 + y^4)$$

facta substitutione iste postremus factor erit

$$-4A - B(x+3y) - 2C(xy+yy) \\ - D(3xyy+y^3) - 4Exy^3$$

quae forma a praecedente hoc tantum discrepat, quod litterae x et y sunt permutatae.

§. 6. Quod si ergo breu. gr. ponamus

$$M = 4A + B(3x+y) + 2C(xx+xy) \\ + D(x^3+3xx y) + 4Ex^3 y$$

$$N = 4A + B(x+3y) + 2C(yy+xy) \\ + D(y^3+3xyy) + 4Exy^3$$

hinc pars elemento dx affecta ita erit expressa:

$$- \frac{dx}{(x-y)^2 \sqrt{X}} (M \sqrt{Y} + N \sqrt{X}).$$

§. 7. Simili modo

$$\text{ob } dV = \frac{Y' dy}{2 \sqrt{Y}},$$

partes elemento dy affectae erunt

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} \left(\frac{V Y'}{(x-y)^2} + \frac{2V \sqrt{Y}}{(x-y)^3} - D \sqrt{Y} - 2E(x+y) \sqrt{Y} \right).$$

Haec iam forma ob

$$V = \sqrt{X} + \sqrt{Y} \text{ et } V V \sqrt{Y} = (X+Y) \sqrt{Y} + 2Y \sqrt{X}$$

continebit sequentes terminos per \sqrt{X} affectos,

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-y)^3} (Y' (x-y) + 4Y)$$

quae forma ex priore praecedentis calculi oritur, si litterae x et y permutentur, simulque signa; vnde patet hanc expressi-

pressionem praebere valorem $+ N$. Reliqui autem termini per \sqrt{Y} effecti erunt

$$\frac{\sqrt{Y}}{(x-y)^3} (Y'(x-y) + 2(X+Y) - D(x-y)^3 - 2E(x+y)(x-y)^3).$$

Haec forma iterum ex permutatione litterarum et signorum ex forma praecedentis calculi oritur, quae ergo cum esset $-N$, haec erit $+M$. Hoc igitur modo partes elementum dy continentis erunt

$$\frac{+dy}{(x-y)^3\sqrt{Y}} (N\sqrt{X} + M\sqrt{Y})$$

§. 8. Coniungendis igitur his membris aequatio differentialis ex forma *Grangiana* orta erit

$$\left(\frac{dy}{\sqrt{Y}} - \frac{dx}{\sqrt{X}}\right) \left(\frac{N\sqrt{X} + M\sqrt{Y}}{(x-y)^3}\right) = 0,$$

quae per factorem comunem diuisa praebet ipsam aequationem differentialem propositam $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$; vnde simul patet aequationem integralem exhibitam recte se habere, atque adeo valorem litterae Δ arbitrio nostro penitus relinqui.

§. 9. Antequam autem methodum *Grangianum* ad ipsam aequationem differentialem $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ in omni extensione acceptam applicemus, a casu simpliciore inchoemus, quo aequatio adeo rationalis proponitur haec:

$$\frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{dy}{a+2by+cy^2}.$$

Analysis.

Pro integratione aequationis differentialis.

$$\frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{dy}{a+2by+cy^2}.$$

§. 10. Ponamus br. gr. $a+2bx+cx^2 = X$ et $a+2by+cy^2 = Y$, vt fieri debeat $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$, quae
formu-

formulae cum inter se debeant esse aequales, vtraque per idem elementum $d t$ designetur, ita vt nanciscamur has duas formulas: $\frac{dx}{dt} = X$ et $\frac{dy}{dt} = Y$.

Quod si ergo iam statuamus

$x - y = q$, erit $\frac{dq}{dt} = X - Y = 2 b q + c q (x + y)$
vnde per q diuidendo erit $\frac{dq}{q dt} = 2 b + c (x + y)$.

§. 11. Nunc primas formulas differentiemus, sumto elemento $d t$ constante, et facto

$$d X = X' d x \text{ et } d Y = Y' d y$$

orientur hae duae aequationes:

$$\frac{d d x}{d x d t} X' \text{ et } \frac{d d y}{d y d t} = Y',$$

quae inuicem additae praebent

$$\frac{d d x}{d x d t} + \frac{d d y}{d y d t} = X' + Y'.$$

Quare cum fit

$$X' = 2 b + 2 c x \text{ et } Y' = 2 b + 2 c y \text{ erit}$$

$$\frac{1}{dt} \left(\frac{d d x}{d x} + \frac{d d y}{d y} \right) = 4 b + 2 c (x + y).$$

§. 12. Quoniam igitur hic postremus valor duplo maior est praecedente $\frac{dq}{dt}$, hoc modo deducti sumus ad hanc aequationem:

$$\frac{d d x}{d x} + \frac{d d y}{d y} = \frac{2 dq}{q},$$

quae integrata dat $l d x + l d y = 2 l q + \text{const}$, hincque in numeris erit

$$d x d y = C q q d t^2, \text{ ita vt fit } C = \frac{d x d y}{q q d t^2}.$$

Quare cum fit

$$\frac{d x}{d t} = X \text{ et } \frac{d y}{d t} = Y, \text{ aequatio integralis erit}$$

$\frac{X Y}{(x - y)^2} = C$, quae ergo non solum est algebraica, sed etiam completa.

§. 13. Si igitur propofita fuerit haec aequatio differentialis :

$$\frac{dx}{a+2bx+cx^2} = \frac{dy}{a+2by+cy^2},$$

eius integrale completum ita erit expreffum :

$$\frac{(a+2bx+cx^2)(a+2by+cy^2)}{(x-y)^2} = C.$$

quae, vtrunque addendo $b^2 - ac$, inducet hanc formam :

$$\frac{aa+2ab(x+y)+2acxy+bb(x+y)^2+2bcxy(x+y)+ccxyxy}{(x-y)^2} = \Delta \Delta,$$

ficque, extracta radice, integrale hanc formam habebit :

$$\frac{a+b(x+y)+cxy}{x-y} = \Delta,$$

quae sine dubio est simpliciffima, quandoquidem tam y per x quam x per y facillime exprimi potest, cum fit

$$y = \frac{(\Delta-b)x-a}{\Delta+b+cx} \text{ et } x = \frac{a+(\Delta+b)y}{\Delta-b-cy}.$$

§. 14. Calculum, quo hic vfi fumus, perpendenti facile patebit, in his formis X et Y , non vltra quadrata progredi licere. Si enim ipfi X infuper tribuamus terminum dx^3 et ipfi Y terminum dy^3 , pro priore forma prodit

$$\frac{x-y}{x-y} = 2b + c(x+y) + d(xx+xy+yy) = \frac{dq}{qdt};$$

pro altera autem forma est

$$X' + Y' = 4b + 2c(x+y) + 3d(xx+xy+yy) = \frac{ddx}{dxdt} + \frac{ddy}{dydt}.$$

Quare fi hinc duplum praecedentis auferamus, colligitur

$$\frac{ddx}{dxdt} + \frac{ddy}{dydt} - \frac{2dq}{qdt} = d(x-y)^2,$$

quam aequationem non amplius integrare licet.

§. 15. Facile autem ostendi potest, talem aequationem differentialem, in qua vltra quadratum proceditur, nullo amplius modo algebraice integrari poffe. Si enim
tan-

tantum hic casus proponeretur: $\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}$, notum est, vtrunque integrale partim logarithmos partim arcus circulares inuoluere, ideoque quantitates transcendentes diuersos, quae nullo modo inter se comparari possunt. Huiusmodi scilicet comparationes iis tantum casibus locum habere possunt, quando vtrunque vnus generis tantum quantitates transcendentes occurrunt.

Analysis.

Pro integratione aequationis

$$\frac{dx}{a+2bx+cx^2} + \frac{dy}{a+2by+cy^2} = 0.$$

§. 16. Quod si hic vt ante ponamus

$$\frac{dx}{a+2bx+cx^2} = dt, \text{ statui debeat } \frac{dy}{a+2by+cy^2} = -dt:$$

at vero si calculum simili modo quo ante instituere velimus, nihil plane proficimus. Postquam autem omnes difficultates probe perpendissem, tandem in artificium incidi, quo hunc casum expedire licuit, ita vt hinc non contemnendum incrementum methodo *Grangianae* attulisse mihi videar.

§. 17. Quoniam igitur has duas habeo aequationes: $\frac{dx}{dt} = X$ et $\frac{dy}{dt} = -Y$, hinc formo istam nouam aequationem:

$$\frac{y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt}}{dt} = yX - xY.$$

Iam facio $xy = u$, vt habeam

$$\frac{du}{dt} = a(y-x) + cxy(x-y),$$

vnde posito

$$x-y = q \text{ erit } \frac{du}{dt} = q(cu - a),$$

quae aequatio per $cu - a$ diuisa ductaque in c prae-
 $\frac{cdx}{dt(cu-a)} = cq$, hocque modo nacti sumus differentiale
 logarithmicum.

§. 18. Dein vero aequationes principales vt ante
 differentiemus, et obtinebimus

$$\frac{ddx}{dt dx} = X' \text{ et } \frac{ddy}{dt dy} = -Y',$$

quae inuicem additae dant

$$\frac{1}{dt} \left(\frac{ddx}{dx} + \frac{ddy}{dy} \right) = X' - Y' = 2cq;$$

quare si hinc duplum praecedentis aequationis subtraha-
 mus, remanebit

$$\frac{1}{dt} \left(\frac{ddx}{dx} + \frac{ddy}{dy} - \frac{2cdx}{cu-a} \right) = 0,$$

unde per dt multiplicando et integrando nanciscimur

$$l dx + l dy - 2l(cu - a) = lC, \text{ ideoque } \frac{dx dy}{(cu-a)^2} = C dt.$$

Cum igitur sit $dx = X dt$ et $dy = -Y dt$, aequatio in-
 tegralis nostra erit $-\frac{XY}{(cu-a)^2} = C$.

§. 19. Per hanc ergo analyfin deducti sumus ad
 hanc aequationem integram aequationis propositae:

$$\frac{(a+2bx+cx^2)(a+2by+cy^2)}{(a-cxy)^2} = C.$$

quae aequatio, si vtrunque vnitas subtrahatur, reducitur ad
 hanc formam:

$$\frac{2ab(x+y)+ac(x+y)^2+bbxy+2bcxy(x+y)}{(a-cxy)^2} = C.$$

§. 20. Illustremus hanc integrationem exemplo,
 ponendo $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$, ita vt proposita sit haec
 aequatio differentialis: $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$, cuius integrale
 nouimus esse $A \text{ tang. } x + A \text{ tang. } y = A \text{ tang. } \frac{x+y}{1-xy} = C$,
 ficque

ficque nouimus esse $\frac{x+y}{1-xy} = C$. At vero nostra postrema formula dat pro hoc casu

$$\frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2} = C \text{ ideoque } \frac{x+y}{1-xy} = C$$

quod egregie conuenit.

§. 21. Consideremus etiam casum, quo $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = 1$, ita vt proponatur haec aequatio:

$$\frac{dx}{1+x+xx} + \frac{dy}{1+y+yy} = 0,$$

cuius integrale est

$$\frac{2}{\sqrt{3}} A \text{ tang. } \frac{x\sqrt{3}}{1+x} + \frac{2}{\sqrt{3}} A \text{ tang. } \frac{y\sqrt{3}}{1+y} = C,$$

vnde sequitur fore

$$A \text{ tang. } \frac{2(x+y+xy)\sqrt{3}}{4+2(x+y)-2xy} = C,$$

ideoque etiam $\frac{x+y+xy}{2+x+y-xy} = C$. At vero forma integralis inuenta pro hoc casu dabit

$$\frac{x+y+(x+y)^2+xy+xy(x+y)}{(1-xy)^2} = C$$

quae in factores resoluta dat

$$\frac{(1+x+y)(x+y+xy)}{(1-xy)^2} = C.$$

Prior vero aequatio

$$\frac{x+y+xy}{2+x+y-xy} = C \text{ inuersa praebet } \frac{2+x+y-xy}{x+y+xy} = C,$$

et vnitatem subtrahita $\frac{1-xy}{x+y+xy} = C$, atque haec in praecedentem ducta dat $\frac{1+x+y}{1-xy} = C$.

§. 22. Videamus igitur, vtrum haec posteriores aequationes inter se conueniant, et quia constantes vtrunque inter se discrepare possunt, ambas aequationes ita referamus:

$$\frac{1-xy}{x+y+xy} = \alpha \text{ et } \frac{1+x+y}{1-xy} = \beta;$$

vnde cum fit $\frac{1}{\alpha} = \frac{x+y+xy}{1-xy}$, evidens est fore $\beta - \frac{1}{\alpha} = 1$, ex quo pulcherrimus consensus inter ambas formulas elucet. Ex his exemplis intelligitur aequationem generalem supra inuentam hoc modo per factores repraesentari posse:

$$\frac{(2b+c(x+y))(a(x+y)+2bxy)}{(a-cxy)^2}.$$

Ceterum consideratio harum formularum haud iniucundas speculationes suppeditare poterit.

§. 23. Sequenti autem modo forma illa integralis inuenta:

$$\frac{(2b+c(x+y))(a(x+y)+2bxy)}{(a-cxy)^2} = C$$

statim ad formam simplicissimam reduci potest; si enim eius factores statuamus

$$\frac{2b+c(x+y)}{a-cxy} = P \text{ et } \frac{a(x+y)+2bxy}{a-cxy} = Q$$

vt esse debeat $PQ = c$, erit

$$aP - cQ = \frac{2ab - 2bcxy}{a-cxy} = 2b \text{ vnde fit } Q = \frac{aP - 2b}{c},$$

sicque quantitati constanti aequari debet haec forma: $\frac{aPP - 2bP}{c}$, ex quo patet, etiam ipsam quantitatem P constanti aequari debere, ita vt iam aequatio nostra integralis fit

$$\frac{2b+c(x+y)}{a-cxy} = C, \text{ vel etiam } \frac{a(x+y)+2bxy}{a-cxy} = C.$$

Alia solutio facillima eiusdem aequationis

$$\frac{dx}{a+2bx+cx^2} + \frac{dy}{a+2cy+cy^2} = 0.$$

§. 24. Postrema reductione probe perpenſa, comperui, statim ab initio ad formam integralis simplicissimam perueniri posse, atque adeo non necesse esse ad differentia-
lia secunda ascendere. Si enim vt ante ponamus $x+y$
 $= p$

$= p$; $x - y = q$ et $xy = u$, ex formulis

$$\frac{dx}{dt} = X \text{ et } \frac{dy}{dt} = -Y$$

statim deducimus

$$\frac{dp}{dt} = X - Y = 2bq + cpq, \text{ vnde fit } \frac{dp}{2b+cp} = q dt.$$

§. 25. Porro vero erit

$$\frac{ydx + xdy}{cxy - a} = \frac{du}{cu - a} = yX - xY = -aq + cqu,$$

vnde fit $\frac{du}{cu - a} = q dt$, quam ob rem hinc statim colligimus hanc aequationem: $\frac{dp}{2b+cp} = \frac{du}{cu - a}$, cuius integratio praebet $l(2b + cp) = l(cu - a) + lC$; vnde deducitur haec aequatio algebraica: $\frac{2b+cp}{cu - a} = C$, quae, restitutis literis x et y , dat $\frac{2b+c(x+y)}{cxy - a} = C$, quae est forma simplicissima aequationis integralis desideratae. Hic imprimis notatu dignum occurrit, quod casum primum hac ratione resolvere non licet.

§. 26. Ex forma autem integrali inuenta facile aliae deriuantur, veluti si addamus $\frac{2b}{a}$, orietur haec forma $\frac{a(x+y) + 2bxy}{cxy - a} = C$, quae per praecedentem diuisa denuo nouam formam suppeditat, scilicet: $\frac{2b+c(x+y)}{a(x+y) + 2bxy} = C$, quae formae quomodo satisfaciant operae pretium erit ostendisse. Et quidem postrema forma, differentiatâ, erit

$$\frac{-2ab(dx + dy) - 4bb(xy dx + xdy) - 2c(xy dx + xdy)}{(a(x+y) + 2bxy)^2}$$

quae in ordinem redacta praebet

$$dx(2ab + 4bbxy + 2bcy) + dy(2ab + 4bbx + 2bcx) = 0.$$

Haec per $2b$ diuisa et separata dat

$$\frac{dx}{a + 2bx + cyx} + \frac{dy}{a + 2by + cxy} = 0$$

quae est ipsa proposita.

Analysis.

Pro integratione aequationis

$$\sqrt{(A+Bx+Cxx)} = \sqrt{(A+By+Cy^2)}.$$

§. 27. Introducto nouo elemento dt , deinceps pro constanti habendo, oriuntur hae duae aequationes:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{X} \text{ et } \frac{dy}{dt} = \sqrt{Y},$$

vbi literis X et Y valores initio assignatos tribuamus. Videbimus autem, pro methodo, qua hic vtemur, terminos litteris D et E affectos omitti debere. Sumtis ergo quadratis erit

$$\frac{dx^2}{dt^2} = X \text{ et } \frac{dy^2}{dt^2} = Y.$$

§. 28. Nunc istas formulas differentiemus, positoque, vt fieri solet, $dX = X' dx$ et $dY = Y' dy$ nanciscemur has aequationes:

$$\frac{2dx dx}{dt^2} = X' \text{ et } \frac{2dy dy}{dt^2} = Y',$$

ac posito $x+y=p$ fiet $\frac{2ddp}{dt^2} = X' + Y'$. Cum iam sit

$$X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^3 \text{ et}$$

$$Y' = B + 2Cy + 3Dyy + 4Ey^3 \text{ erit}$$

$$X' + Y' = 2B + 2Cp + 3D(xx+yy) + 4E(x^3+y^3) = \frac{2ddp}{dt^2},$$

quae aequatio manifesto integrationem admittet, si fuerit et $D=0$ et $E=0$, quemadmodum assumimus. Multiplicando igitur per dp et integrando nanciscimur

$$\frac{dp^2}{dt^2} = \Delta + 2Bp + Cp^2$$

et radicem extrahendo

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{(\Delta + 2Bp + Cp^2)}.$$

Cum

Cum igitur fit $\frac{dp}{dt} = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$, aequatio integralis, quam fumus adepti, erit

$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{(\Delta + 2B(x+y) + C(x+y)^2)}$,
quae adeo est algebraica; vbi notetur esse

$$X = A + Bx + Cxx \text{ et } Y = A + By + Cyy.$$

§. 29. Sumamus igitur quadrata, et nostra aequatio integralis erit

$$2A + B(x+y) + C(x^2 + y^2) + 2\sqrt{XY} \\ = \Delta + 2B(x+y) + C(x+y)^2, \text{ siue}$$

$$2A - B(x+y) - 2Cxy + 2\sqrt{XY} = \Delta,$$

quae penitus ab irrationalitate liberata, posito $\Delta - 2A = \Gamma$ praebebit

$$4XY = 4AA + 4AB(x+y) + 4AC(xx+yy) \\ + 4BBxy + 4BCxy(x+y) + 4CCxxyy \\ = \Gamma^2 + 2\Gamma B(x+y) + 4\Gamma Cxy + BB(x+y)^2 \\ + 4BCxy(x+y) + 4CCxxyy$$

siue

$$(4AA - \Gamma^2) + 2B(2A - \Gamma)(x+y) + 4(BB - \Gamma C)xy \\ + 4AC(xx+yy) - B^2(x+y)^2 = 0.$$

§. 30. Quod si iam hanc aequationem rationalem cum formula *canonica*, qua olim sum vsus ad huiusmodi integrationes expediendas, comparemus, quae erat

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy = 0,$$

dum scilicet loco $(x+y)^2$ scribamus $(xx+yy) + 2xy$, reperiemus fore

$$\alpha = 4AA - \Gamma^2; \beta = B(2A - \Gamma); \gamma = 4AC - B^2; \\ \delta = BB - 2\Gamma C.$$

§. 31. Alio vero insuper modo eandem aequationem differentialem propositam integrare poterimus, introducendo litteram $q = x - y$; tum enim habebimus

$$2 \frac{d \, d q}{d t} = X' - Y'. \text{ At vero erit}$$

$$X' - Y' = 2 C q + 3 D q (x + y)$$

vbi iterum patet statui debere tam $D = 0$ quam $E = 0$, vt integratio, multiplicando per $d q$, succedat. Hoc autem notato erit integrale $\frac{d q^2}{d t^2} = \text{Const} + C q q$, ideoque

$$\frac{d q}{d t} = \sqrt{(\Delta + C q q)}.$$

§. 32. Cum igitur sit $\frac{d q}{d t} = \sqrt{X} - \sqrt{Y}$, hoc integrale ita erit expressum:

$$\sqrt{X} - \sqrt{Y} = \sqrt{(\Delta + C q q)}$$

quae aequatio sumtis quadratis abit in hanc:

$$2 A + B (x + y) + C (x x + y y) - 2 \sqrt{X Y} = \Delta + C (x - y)^2 \text{ siue}$$

$$2 A + B (x + y) + 2 C x y - 2 \sqrt{X Y} = \Delta$$

vnde fit

$$2 \sqrt{X Y} = 2 A - \Delta + B (x + y) + 2 C x y,$$

vbi si ponatur $2 A - \Delta = - \Gamma$ aequatio ab ante inventa prorsus non discrepat.

§. 33. Quod si autem proposita fuisset aequatio

$$\frac{d x}{\sqrt{(A + B x x + C x x)}} + \frac{d y}{\sqrt{(A + B y y + C y y)}} = 0,$$

integralia ante inuenta ad hunc casum referentur, si modo loco \sqrt{Y} scribatur $-\sqrt{Y}$; vnde patet pro hoc casu haberi hanc aequationem:

$$\sqrt{X} - \sqrt{Y} = \sqrt{(\Delta + 2 B (x + y) + C (x + y)^2)}$$

vel

vel etiam

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{(\Delta + C(x-y)^2)}$$

§. 34. Hic singularis casus occurrit, quando formulae $A + Bx + Cxx$ sunt quadrata. Sit enim

$$X = (a + bx)^2 \text{ et } Y = (a + by)^2 \text{ ideoque}$$

$$A = a^2, B = 2ab, C = bb;$$

tum enim prior forma integralis erit

$$b(x-y) = \sqrt{(\Delta + 4ab(x+y) + bb(x+y)^2)}$$

sumtisque quadratis

$$-4bbxy = \Delta + 4ab(x+y), \text{ ideoque}$$

$$\Delta = a(x+y) + bxy$$

cuius aequationis differentiale est

$$a(dx + dy) + b(xdy + ydx) = 0 \text{ ideoque}$$

$$dx(a + by) + dy(a + bx) = 0.$$

Sin autem altera formula vtatur, erit

$$2a + b(x+y) = \sqrt{(\Delta + bb(x-y)^2)}$$

unde quadratis sumtis, positoque $\Delta - 4aa = \Gamma$ prodit
vt ante $\Gamma = a(x+y) + bxy.$

Analyfis

Pro integranda aequatione

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

existente $X = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4$

et $Y = A + By + Cyy + Dy^3 + Ey^4.$

§. 35. Introducto iterum elemento dz , ut sit

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{X} \text{ et } \frac{dy}{dz} = \sqrt{Y}$$

ideoque sumtis quadratis

$$\frac{dx^2}{dz^2} = X \text{ et } \frac{dy^2}{dz^2} = Y,$$

statuamus $x + y = p$ et $x - y = q$, et quia hinc prodit

$$dx^2 - dy^2 = dp dq, \text{ erit}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp dq}{dz^2} &= X - Y = B(x - y) + C(x^2 - y^2) \\ &+ D(x^3 - y^3) + E(x^4 - y^4) \end{aligned}$$

§. 36. Quoniam igitur est

$$x = \frac{p+q}{2} \text{ et } y = \frac{p-q}{2}$$

his valoribus introductis reperietur

$$\begin{aligned} X - Y &= Bq + Cp + \frac{1}{4}Dq(3pp + qq) \\ &+ \frac{1}{8}Epq(pp + qq) \end{aligned}$$

vnde per q diuidendo oritur

$$\frac{dp}{q dz} = B + Cp + \frac{1}{4}D(3pp + qq) + \frac{1}{8}Epq(pp + qq).$$

§. 37. Nunc etiam formulas quadratas primo exhibitas differentiemus, et statuendo ut ante

$$dX = X' dx \text{ et } dY = Y' dy \text{ habebimus}$$

$$\frac{2 dx dx'}{dz^2} = X' \text{ et } \frac{2 dy dy'}{dz^2} = Y', \text{ hincque addendo}$$

$$\frac{2 dx dp'}{dz^2} = X' + Y'. \text{ Cum vero sit}$$

$$X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^2 \text{ et}$$

$$Y' = B + 2Cy + 3Dyy + 4Ey^2$$

$$\text{erit } X' + Y' = 2B + 2Cp + \frac{3}{2}D(pp + qq) + Ep(pp + 3qq),$$

ita

ita vt substituto hoc valore fiat

$$\frac{d d p}{d t^2} = B + C p + \frac{1}{2} D (p p + q q) + \frac{1}{2} E p (p p + 3 q q)$$

a qua aequatione si priorem $\frac{d p d q}{q d t^2}$ subtrahamus, remanebit sequens:

$$\frac{d d p}{d t^2} - \frac{d p d q}{q d t^2} = \frac{1}{2} D q q + E p q q.$$

§. 38. Haec iam aequatio per $q q$ diuisa producit istam:

$$\frac{1}{d t^2} \left(\frac{d d p}{q q} - \frac{d p d q}{q^2} \right) = \frac{1}{2} D + E p,$$

quae ducta in $2 d p$ manifesto fit integrabilis: prodit enim

$$\frac{d p^2}{q q d t^2} = \Delta + D p + E p p$$

ex qua radice extracta colligitur:

$$\frac{d p}{q d t} = \sqrt{(\Delta + D p + E p p)}.$$

Cum igitur posuerimus

$$p = x + y \text{ et } q = x - y, \text{ erit } \frac{d p}{d t} = \sqrt{X} + \sqrt{Y},$$

vnde resultat haec aequatio integralis algebraica:

$$\frac{\sqrt{X} + \sqrt{Y}}{x - y} = \sqrt{(\Delta + D(x + y) + E(x + y)^2)}$$

quae est ipsa forma ab Illustri la Grange inuenta.

§. 39. Euoluamus vltcrius hanc formam, ac sumtis quadratis erit

$$\frac{x + y + \frac{1}{2} \sqrt{X Y}}{(x - y)^2} = \Delta + D(x + y) + E(x + y)^2.$$

Est vero

$$X + Y = 2 A + B(x + y) + C(x x + y y) + D(x^2 + y^2) + E(x^4 + y^4)$$

vnde si auferamus

$$(D(x + y) + E(x + y)^2)(x - y)^2$$

remanebit

$$2 A + B(x + y) + C(x^2 + y^2) + D x y (x + y) + 2 E x x y y,$$

quo substituto aequatio integralis erit

$$\frac{2A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + Dxy(x+y) + Ex^2y^2 + 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta$$

§. 40. Haec aequatio aliquanto concinnior reddi potest subtrahendo vtrinque C et statuendo $\Delta - C = \Gamma$: habebitur enim hoc factio

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + Exxyy + 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Gamma$$

vnde deducimus

$$2\sqrt{XY} = \Gamma(x-y)^2 - 2A - B(x+y) - 2Cxy - Dxy(x+y) - 2Exxyy$$

sive ponendo

$$2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy = V$$

aequatio nostra erit

$$2\sqrt{XY} = \Gamma(x-y)^2 - V, \text{ quae sumtis quadratis}$$

abit in hanc:

$$4XY = \Gamma^2(x-y)^4 - 2\Gamma V(x-y)^2 + VV \text{ sive}$$

$$4XY - VV = \Gamma^2(x-y)^4 - 2\Gamma V(x-y)^2$$

§. 41. Facta nunc substitutione erit

$$\begin{aligned} 4XY &= 4A^2 + 4AB(x+y) + 4AC(xx+yy) \\ &+ 4AD(x^2+y^2) + 4AE(x^4+y^4) + 4BBxy \\ &+ 4BCxy(x+y) + 4BDxy(xx+yy) \\ &+ 4BExy(x^2+y^2) + 4CCxxyy \\ &+ 4CDxxyy(x+y) + 4CExxyy(xx+yy) \\ &+ 4DDx^3y^3 + 4DEx^3y^3(x+y) \\ &+ 4EEx^4y^4. \end{aligned}$$

At vero porro colligitur fore

$$\begin{aligned} VV &= 4AA + 4AB(x+y) + 8ACxy \\ &+ 4ADxy(x+y) + 8AExxyy + BB(x+y)^2 \\ &\quad + 4B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4 B C x y (x+y) + 2 B D x y (x+y)^2 \\
 & + 4 B E (x+y) x x y y + 4 C C x x y y \\
 & + 4 C D (x+y) x x y y + 8 C E x^3 y^2 \\
 & + D D x x y y (x+y)^2 + 4 D E x^3 y^2 (x+y) \\
 & + 4 E E x^4 y^2
 \end{aligned}$$

§. 42. Quod si iam posteriorem formulam a priore subtrahamus et singulos terminos ordine analogos disponamus, reperiemus

$$\begin{aligned}
 4 X Y - V V &= 4 A C (x-y)^2 + 4 A D (x+y) (x-y)^2 \\
 &+ 4 A E (x+y)^2 (x-y)^2 - B^2 (x-y)^2 \\
 &+ 2 B D x y (x-y)^2 + 4 B E x y (x+y) (x-y)^2 \\
 &+ 4 C E x x y y (x-y)^2 - D D x x y y (x-y)^2
 \end{aligned}$$

quae expressio factorem habet communem $(x-y)^2$, per quem ergo si diuidamus perueniemus ad hanc aequationem concinniorē:

$$\begin{aligned}
 & 4 A C + 4 A D (x+y) + 4 A E (x+y)^2 - B B \\
 & + 2 B D x y + 4 B E x y (x+y) + (4 C E - D D) x x y y \\
 & = \Gamma \Gamma (x-y)^2 - 4 \Gamma A - 2 \Gamma B (x+y) - 4 \Gamma C x y \\
 & - 2 \Gamma D x y (x+y) - 4 \Gamma E x x y y
 \end{aligned}$$

§. 43. Transferamus nunc omnes terminos ad partem sinistram et loco $(x+y)^2$ scribamus $(x x + y y) + 2 x y$, tum vero $(x x + y y) - 2 x y$ loco $(x-y)^2$, quo facto talis oritur aequatio meae canonicae respondens:

$$\begin{aligned}
 0 = & \begin{cases} 4 A C + 4 A D (x+y) + 4 A E (x^2 + y^2) + 2 B D x y + 4 B E x y (x+y) + 4 C E x x y y \\ - B B + 2 \Gamma C (x+y) - \Gamma \Gamma (x^2 + y^2) + 8 A E x y + 2 \Gamma D x y (x+y) - D D x x y y \\ + 4 \Gamma A & + 2 \Gamma^2 x y & + 4 \Gamma E x x y y \\ & + 4 \Gamma C x y \end{cases}
 \end{aligned}$$

§. 44. Hinc ergo pro aequatione canonica literae graecae α , β , γ , δ , etc. per latinas A, B, C, D, E, una cum constante Γ sequenti modo determinantur:

$$\alpha = 4 A C + 4 \Gamma A - B B$$

$$\beta = 2 A D + \Gamma B$$

$$\gamma = 4 A E - \Gamma \Gamma$$

$$\delta = B D + 4 A E + \Gamma^2 + 2 \Gamma C$$

$$\varepsilon = 2 B E + \Gamma D$$

$$\zeta = 4 C E + 4 \Gamma E - D D$$

ita vt aequatio canonica, qua olim sum vfus, fit

$$\alpha + 2 \beta (x+y) + \gamma (x x + y y) + 2 \delta x y + 2 \varepsilon x y (x+y) + \zeta x x y y = 0.$$

§. 45. Haec autem aequatio integralis ad rationalitatem perducta latius patet quam aequatio proposita differentialis $\frac{d x}{\sqrt{x}} - \frac{d y}{\sqrt{y}} = 0$: simul enim complectitur integrale huius: $\frac{d x}{\sqrt{x}} + \frac{d y}{\sqrt{y}} = 0$. Scilicet haec aequatio complectitur duos factores, quorum alteruter alterutri satisfacit. Ex genefi autem patet hanc aequationem esse productum ex his factoribus: $\Delta (x-y)^2 - V + 2 \sqrt{X Y}$, et $\Delta (x-y)^2 - V - 2 \sqrt{X Y}$.

§. 46. Supra iam obseruauimus, eiusdem aequationis differentialis integrale hoc quoque modo exhiberi posse:

$$\frac{M \sqrt{Y} + N \sqrt{X}}{(x-y)^2} = C \text{ (vide §. 8. et praec.) existente}$$

$$M = 4 A + B (3 x + y) + 2 C (x x + x y) + D x x (x + 3 y) + 4 E x^3 y$$

$$N = 4 A + B (3 y + x) + 2 C y (x + y) + D y y (y + 3 x) + 4 E x y^3$$

vbi notasse iuuabit esse.

$$M + N = 8 A + 4 B (x + y) + 2 C (x + y)^2 + D (x + y)^3 + 4 E x y (x + y)$$

$$M - N = 2 B (x - y) + 2 C (x + y) (x - y) + D (x - y) (x^2 + 4 x y + y^2) + 4 E x y (x + y) (x - y)$$

Interim tamen haud facile intelligitur, quomodo haec forma cum ante inuenta consentiat, dum tamen de consensu certi esse possumus.

§. 47. Ex iis, quae haecenus sunt allata, satis liquet, eandem aequationem integram innumeris modis exhiberi posse, prout constans arbitraria alio atque alio modo repraesentatur; vnde plurimum intererit certam legem stabilire, secundum quam quouis casu constantem illam arbitriariam exprimere velimus. Hunc in finem ista regula obseruetur: vt perpetuo integralia ita capiantur, vt posito $y = 0$ fiat $x = k$, hincque secundum legem compositionis $X = K$, existente

$$K = A + B k + C k k + D k^3 + E k^4$$

Hac enim lege obseruata omnia integralia, vtcunque diuersa videantur, ad perfectum consensum perducere poterunt. Hoc igitur modo quae haecenus inuenimus sequentibus Theorematibus complectamur.

Theorema I.

§. 48. Si haec aequatio differentialis

$$\frac{dx}{a + b x + c x x} - \frac{dy}{a + b y + c y y} = 0,$$

ita integretur, vt posito $y = 0$ fiat $x = k$, integrale ita se habebit:

$$\frac{2 a + b (x + y) + c x y}{x - y} = \frac{2 a + b k}{k}.$$

Theorema II.

§. 49. Si haec aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{a+bx+cx^2} + \frac{dy}{a+by+cy^2} = 0$$

ita integretur, vt posito $y=0$ fiat $x=k$, integrale supra triplici modo est inuentum; erit enim:

I. $\frac{b+cx(x+y)}{cx^2y-a} = -\frac{b+ck}{a};$

II. $\frac{a(x+y)+bxy}{cx^2y-a} = -k$

III. $\frac{b+c(x+y)}{a(x+y)+bxy} = \frac{b+ck}{a.k}$

Theorema III.

§. 50. Si haec aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}} - \frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cy^2)}} = 0$$

ita integretur, vt posito $y=0$ fiat $x=k$, integrale erit

$$-B(x+y) - 2Cxy + 2\sqrt{(A+Bx+Cxx)} \\ \sqrt{(A+By+Cy^2)} =$$

$$-Bk + 2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}, \text{ siue}$$

$$B(k-x-y) - 2Cxy = 2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)} \\ - 2\sqrt{(A+Bx+Cxx)(A+By+Cy^2)}$$

Corollarium.

§. 51. Hinc ergo patet, si aequatio differentialis proposita, fuerit ista:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cy^2)}} = 0,$$

eaque integretur ita, vt posito $y=0$ fiat $x=k$, integrale fore

$$B(k-x-y) - 2Cxy = 2\sqrt{(A+Bx+Cxx)} \\ \sqrt{(A+By+Cy^2)} - 2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}.$$

Theo-

Theorema IV.

§. 52. Si posito br. gr.

$$X = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4$$

$$Y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4$$

$$K = A + Bk + Ckk + Dk^3 + Ek^4$$

haec proponetur aequatio differentialis: $\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$,
 quae ita integrari debeat, vt posito $y=0$ fiat $x=k$, eius
 integrale ita erit expressum:

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dx y(x+y) + 2Exxyy + 2\sqrt{XY}}{(x+y)^2} =$$

$$\frac{2A + Bk + 2\sqrt{AK}}{k k}$$

Sin autem aequatio proposita fuerit

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0, \text{ eius integrale erit}$$

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dx y(x+y) + 2Exxyy - 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} =$$

$$\frac{2A + Bk - 2\sqrt{Ak}}{k k}$$

Corollarium I.

§. 53. Quod si hic ponamus $D=0$ et $E=0$, casus oritur Theorematis tertii, pro aequatione

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cxx}} - \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2}} = 0,$$

cuius ergo integrale hinc erit

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + \sqrt{(A+Bx+Cxx)(A+By+Cy^2)}}{(x-y)^2} =$$

$$\frac{2A + Bk + 2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}}{k k},$$

quae forma si cum superiori comparatur, formulae irrationales eliminari poterunt. Quoniam enim ex prior est

$$2\sqrt{XY} = 2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)} - B(k-x-y) + 2Cxy$$

erit hoc integrale postrenum

$$\frac{2A+B(2x+2y-k)+4Cxy+2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}}{(x-y)^2} =$$

$$\frac{2A+Bk+2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}}{kk}$$

vnde statim deduci potest aequatio canonica

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy = 0.$$

Corollarium II.

§. 54. Ponamus nunc esse $A=0$ et $B=0$, vt fit
 $X=xx(C+Dx+Exx)$ et $Y=yy(C+Dy+Eyy)$
 et $K=kk(C+Dk+Ek k)$

aequatio differentialis integranda fiet

$$\frac{dx}{x\sqrt{(C+Dx+Exx)}} - \frac{dy}{y\sqrt{(C+Dy+Eyy)}} = 0,$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{xy(2C+D(x+y)+2Exy)+2xy\sqrt{(C+Dx+Exx)(C+Dy+Eyy)}}{(x-y)^2} = \Delta$$

atque hic constantem Δ per k definire non licebit: positio enim $y=0$ incongruum iam inuoluit. Interim tamen et haec integratio maxime est memoratu digna.

Corollarium III.

§. 55. Quod si autem in hac postrema integratione loco x et y scribamus $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ primo aequatio differentialis erit

$$\frac{dy}{y(Cyy+Dy+E)} - \frac{dx}{x(Cxx+Dx+E)} = 0;$$

tum vero integrale sequentem inducet formam:

$$\frac{2Cxy+D(x+y)+2E+2\sqrt{(Cxx+Dx+E)(Cyy+Dy+E)}}{(y-x)^2} = \Delta$$

$$= \frac{Dk+2E+2\sqrt{E(Ckk+Dk+E)}}{kk}$$

Si

Si igitur hic loco literarum E, D, C, scribamus A, B, C, prodibit aequatio differentialis supra tractata

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cy y)}}$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{2A+B(x+y) + 2Cxy + 2\sqrt{(A+Bx+Cxx)(A+By+Cy y)}}{(x-y)^2} = \frac{Bk + 2A + 2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}}{k^2},$$

quae egregie conuenit cum ea in Coroll. I. data.

Corollarium IV.

§. 56. Contemplemur nunc etiam casum, quo formula $A+Bx+Cxx+Dx^3+Ex^4$ fit quadratum, quod sit $(a+bx+cx x)^2$, ita vt iam habeamus

$A=aa$, $B=2ab$, $C=bb+2ac$, $D=2bc$, $E=cc$, tum vero

$$\sqrt{X} = a + bx + cx x, \quad \sqrt{Y} = a + by + cy y, \\ \sqrt{K} = a + bk + ck k$$

atque aequatio differentialis pro priore casu erit

$$\frac{dx}{a+bx+cx x} = \frac{dy}{a+by+cy y} = 0,$$

cuius ergo integrale erit

$$(2aa + 2ab(x+y) + 2(bb+2ac)xy + 2bcxy(x+y) + 2ccxxyy + 2(a+bx+cx x)(a+by+cy y)) : (x-y)^2 = \Delta,$$

quae reducitur ad

$$\frac{aa+ab(x+y) + (b^2+ac)xy + bcxy(x+y) + ccxxyy}{(x-y)^2} =$$

$$\frac{aa + a b k}{k k}. \quad \text{Quod si iam vtrunque addamus } \frac{1}{4} b b,$$

prodibit

$$\frac{(a + \frac{1}{2} b (x+y) + c x y)^2}{(x-y)^2} = \frac{(a + \frac{1}{2} b k)^2}{k^2}$$

vnde extracta radice obtinetur forma integralis in theoremate primo assignata.

§. 57. Sin autem hoc modo alterum casum aequationis

$$\frac{dx}{a+bx+cx^2} + \frac{dy}{a+by+cy^2} = 0$$

evolvere velimus, pervenimus ad hanc aequationem:

$$\frac{2ax+2bh(x+y)+2bh+2ac}{(x-y)^2} xy + 2bcxy(x+y) + 2ccxxyy - \frac{2(a+bx+cx^2)(a+by+cy^2)}{(x-y)^2} = \Delta,$$

quae evoluta praebet $\Delta = -2ac$, haecque aequatio manifesto est absurda, et nihil circa integrale quaesitum declarat, cuius rationem maximi momenti erit perscrutari.

Insigne Paradoxon.

§. 58. Cum huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$$

integrale in genere inuentum fit

$$\frac{2A+B(x+y)+2Cxy+Dxy(x+y)+2Exxyy-2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta$$

casu autem, quo statuitur

$$\sqrt{X} = a + bx + cx^2 \text{ et } \sqrt{Y} = a + by + cy^2$$

aequatio absurda inde oriatur, quaeritur enodatio huius insignis difficultatis ac praecipue modus, hinc verum integralis valorem inuestigandi.

Enodatio Paradoxi.

§. 59. Quemadmodum scilicet in Analyfi eiusmodi formulae occurrere solent, quae certis casibus indeterminatae atque adeo nihil plane significare videntur: ita hic

hic simile quid vsu venit, sed longe alio modo, cum neque ad fractionem, cuius numerator et denominator simul euanescent, neque ad differentiam inter duo infinita perveniatur, quod exemplum eo magis est notatu dignum, quod non memini, similem casum mihi vnquam se obtulisse. Istud singulare phaenomenon se nimirum exerit, quando ambae formulae X et Y euadunt quadrata, ad quod ergo resoluendum ad simile artificium recurri oportet, quo formulae X et Y non ipsis quadratis aequales sed ab iis infinite parum discrepare assumuntur.

§. 60. Statuamus igitur

$X = (a + bx + cx^2) + \alpha$ et $Y = (a + by + cy^2) + \alpha$,
ita vt pro litteris maiusculis A, B, C, D, E, fiat $A = aa + \alpha$,
 $B = 2ab$, $C = 2ac + bb$, $D = 2bc$, $E = cc$, ubi α
denotat quantitatem infinite parvam, deinceps nihilo aequalem ponendam. Hinc ergo si br. gr. ponamus

$$a + bx + cx^2 = R \text{ et } a + by + cy^2 = S \text{ erit}$$

$$\sqrt{X} = R + \frac{\alpha}{2R} \text{ et } \sqrt{Y} = S + \frac{\alpha}{2S}.$$

§. 61. Nunc igitur consideremus formam integralis primo inuentam, quae erat

$$\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x - y} = V(\Delta + D(x + y) + E(x + y)^2)$$

pro qua igitur habebimus

$$\sqrt{X} - \sqrt{Y} = R - S - \frac{\alpha(R - S)}{2RS}.$$

Quia vero hic erit

$$R - S = b(x - y) + c(xx - yy) \text{ fiet } \frac{R - S}{x - y} = b + c(x + y).$$

At posito br. gr. $x + y = p$ erit $\frac{R - S}{x - y} = b + cp$, vnde
aequa-

aequatio nostra erit

$$b + cp - \frac{\alpha(b+cp)}{2RS} = \sqrt{\Delta + 2bcp + ccp}$$

§. 62. Sumantur nunc vtrisque quadrata et aequatio nostra sequentem induet formam: $bb - \frac{\alpha}{RS}(b+cp)^2 = \Delta$. Alteriores scilicet potestates ipsius α hic vbique praetermittuntur. Hic ergo ratio nostri Paradoxi manifesto in oculos incidit, quia posito $\alpha = 0$ oritur $bb = \Delta$; vnde, vt Δ maneat constans arbitraria, euident est, differentiam inter bb et Δ etiam infinite paruam statui debere; quam obrem ponamus $\Delta = bb - \alpha\Gamma$, ac obtinebitur ista aequatio penitus determinata $\frac{(b+cp)^2}{RS} = \Gamma$, siue

$(b + c(x+y))^2 = \Gamma(a + bx + cxx)(a + by + cyy)$
 quae forma non multum discrepat a formula supra inuenta.

§. 63. Haec quidem forma magis est complicata quam solutiones §§ 24 et seqq. inuentae: Sequenti autem artificio ad formam simplicissimam redigi poterit. Cum haec fractio $\frac{RS}{(b+cp)^2}$ debeat esse quantitas constans, sit ea = F, vt esse debeat $F(cp + b)^2 = RS$, et quemadmodum hic posuimus $x + y = p$, ponamus porro $xy = u$, fietque:

$RS = aa + abp + ac(pp - 2u) + bbu + bcpu + ccuu$
 atque aequatio iam secundum potestates ipsius p disposita erit

$$\begin{aligned} F(cp + b)^2 &= acpp + abp + aa \\ &\quad + bcpu + bbu \\ &\quad - 2acu \\ &\quad + ccuu \end{aligned}$$

vbi primo vtrinq̃e diuidamus, quatenus fieri potest, per $cp + b$, ac reperietur

$$F(cp + b) = ap + bu + \frac{(a - cu)^2}{cp + b}.$$

Diuidamus nunc porro per $cp + b$, quatenus fieri potest, ac fiet

$$F = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \frac{(a - cu)}{(cp + b)} + \frac{(a - cu)^2}{(cp + b)^2}.$$

§. 64. Hac forma inuenta, si statuamus

$$\frac{a - cu}{cp + b} = V, \text{ erit } F = \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \cdot V + VV.$$

Cum igitur ista expressio aequari debeat quantitati constanti, euident est ipsam quantitatem V constantem esse debere, ita vt iam nostrum integrale reductum sit ad hanc formam:

$$\frac{a - cu}{cp + b} = \frac{a - cxy}{c(x + y) + b} = \text{Const.}$$

Subtrahamus vtrinq̃e $\frac{a}{b}$

$$\text{fietque } \frac{cxy + a(x + y)}{b + c(x + y)} = \text{Const.}$$

quae forma per priorem diuisa producit hanc:

$$\frac{a(x + y) + cxy}{cxy - a} = \text{Const.}$$

quae formae conueniunt cum supra exhibitis.

Theorema V.

§. 65. Si in genere haec ratio designandi adhibeatur: vt sit $Z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$, atque valor huius formulae integralis $\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}$, ita sumtus vt euanescat posito $z = 0$, designetur hoc charactere $\Pi : z$; tum, vt fiat $\Pi : k = \Pi : x + \Pi : y$, necesse est vt inter quantitates k, x, y ista relatio subsistat:

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy + 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \frac{2A + Bk + 2\sqrt{\Delta K}}{kk}$$

cuius ratio ex superioribus est manifesta. Cum enim k denotet quantitatem constantem erit

$$d.\Pi : x + d.\Pi : y = 0 \text{ siue } \frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0,$$

cuius integrale modo ante vidimus ita exprimi:

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy + 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta.$$

Quare cum esse debeat $\Pi : x + \Pi : y = \Pi : k$, manifestum est posito $y = 0$ fieri debere $\Pi : x = \Pi : k$ ideoque $x = k$ vnde constans indefinita Δ eodem prorsus modo definitur, uti est exhibitum.

Corollarium I.

§. 66. Hinc si formulæ $\Pi : z$ exprimat arcum cuiuspiam lineae curvae abscissae siue applicatae Z respondentem, in hac curva omnes arcus eodem modo inter se comparare licebit, quo arcus circulares inter se comparantur, quandoquidem, propositis duobus arcibus $\Pi : x$ et $\Pi : y$, tertius arcus $\Pi : k$ semper exhiberi poterit vel summae vel differentiae eorum arcuum aequalis.

Corollarium II.

§. 67. Ita si in hac forma $\Pi : k = \Pi : x + \Pi : y$ statuatur $y = x$, prodibit $\Pi : k = 2\Pi : x$; sicque arcus reperitur duplo alterius aequalis. At vero si in nostra forma faciamus $y = x$; tam numerator quam denominator in nihilum abeunt. Ut autem eius verum valorem eruamus, utamur aequatione primum (§. 38.) inuenta:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} = \sqrt{\Delta + D(x+y) + E(x+y)^2},$$

et iam in membro sinistro spectetur y vt constans; ipsi x vero valorem tribuamus infinite parum discrepantem, siue, quod eodem redit, loco numeratoris et denominatoris eorum differentialia substituantur, sumpta sola x variabili, hocque modo pro casu $y = x$ membrum sinistrum euadit $\frac{X'}{2\sqrt{X}}$, vbi est $X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^2$. Nunc ergo sumtis quadratis habebitur:

$$\frac{X'X'}{4X} = \Delta + 2Dx + 4Exx,$$

existente Δ vt ante $= \frac{2A+Bk-2\sqrt{AK}}{kk}$.

Corollarium III.

§. 68. Verum sine his ambagibus duplicatio arcus ex altera forma $\Pi : k = \Pi : x - \Pi y$ deduci potest, ponendo $y = k$, siquidem hinc fit $\Pi : x = 2\Pi : k$, pro quo ergo casu relatio inter x et k hac aequatione exprimitur:

$$\frac{2A+B(x+k)+2Ckx+Dkx(k+x)+2Ekxx+2\sqrt{KX}}{(x-k)^2} = \frac{2A+Bk+2\sqrt{AK}}{kk}.$$

Facile autem patet quomodo hinc ad triplicationem, quadruplicationem et quamlibet multiplicationem arcuum progredi debeat, quod argumentum olim fusius sum tractatus.

Theorema VI.

§. 69. Si in formis supra inuentis ponatur tam $B = 0$ quam $D = 0$, vt fit $X = A + Cxx + Ex^2$ et $Y = A + Cyy + Ey^2$ et $K = A + Ckk + Ek^2$; tum si ista aequatio $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$ ita integretur, vt posito $y = 0$ fiat $x = k$, tum aequatio integralis erit:

$$\frac{A+Cxy+Exxyy+\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \frac{A+\sqrt{AK}}{kk}.$$

Corollarium I.

§. 70. Hic notari meretur, istum casum adhuc alio modo ex forma generali deduci posse, si scilicet sumatur $A=0$ et $E=0$, tum enim prodit ista aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(Bx+Cxx+Dx^3)}} + \frac{dy}{\sqrt{(By+Cy^2+Dy^3)}} = 0$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{2B(x+y) + 2Cxy + Dx y(x+y) \mp 2\sqrt{(Bx+Cxx+Dx^3)(By+Cy^2+Dy^3)}}{(x-y)^2} = \frac{B}{k} = \frac{B}{k}, \text{ vbi valor constantis admodum simplex euasit.}$$

Nunc in his formulis loco x et y scribamus xx et yy , at vero loco litterarum B et D scribamus A et E , fietque aequatio differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Cxx+Dx^2)}} + \frac{dy}{\sqrt{(A+Cy^2+Ey)}} = 0$$

cuius ergo integrale etiam hoc modo exprimetur

$$\frac{A(xx+yy) + 2Cxy + Exxy(x+yy) \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx-yy)^2} = \frac{A}{kk}$$

Corollarium II.

§. 71. Ecce ergo hac ratione peruenimus ad aliam integralis formam non minus notabilem priore, atque adeo nunc ex earum combinatione formula radicalis \sqrt{XY} eliminari poterit, quandoquidem ex posteriore fit

$$\mp 2\sqrt{XY} = \frac{A(xx-yy)^2}{kkxy} - \frac{A(xx+yy)}{xy} - 2Cxy - Exy(xx+yy)$$

qui valor in priore substitutus conducit ad hanc aequationem rationalem:

$$\begin{aligned} & 2A + 2Cxy + 2Exxyy \\ & + \frac{A(xx-yy)^2}{kkxy} - \frac{A(xx+yy)}{xy} - 2Cxy - Exy(xx+yy) \\ & = \frac{2A(xx-yy)^2}{kk} \mp \frac{2(xx-yy)^2\sqrt{AK}}{kk} \end{aligned}$$

quae

quae porro reducta et per $(x - y)^2$ diuisa reuocatur ad hanc formam:

$$\frac{zA + 2\sqrt{AK}}{kk} = \frac{A(x+y)^2}{kkxy} - Exy - \frac{A}{xy}$$

sive ad hanc:

$$\frac{A}{kk} (xx + yy - kk) - Exxyy + \frac{2xy\sqrt{AK}}{kk} = 0$$

quae egregie conuenit cum aequatione canonica, qua olim sum vsus: scil.

$$0 = \alpha + \gamma (xx + yy) + 2\delta xy + \zeta xxxy$$

si quidem est

$$\alpha = -\frac{A}{kk}; \gamma = +\frac{A}{kk}; 2\delta = \pm \frac{2\sqrt{AK}}{kk}; \zeta = -E$$

Corollarium III.

§. 72. Methodo posteriore, qua hic vsi sumus ad hanc aequationem integrandam, aequatio multo generalior tractari poterit, vbi in formulis radicalibus potestates vsque ad sextam dimensionem assurgunt. Namque si tantum statuamus $A = 0$, vt sit aequatio

$$\frac{dx}{\sqrt{x(B+Cx+Dxx+Ex^3)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{y(B+Cy+Dyy+Ey^3)}} = 0$$

eius integrale est

$$\frac{B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy}{(x-y)^2} \pm \frac{2\sqrt{xy}(B+Cx+Dxx+Ex^3)(B+Cy+Dyy+Ey^3)}{(x-y)^2} = \frac{B}{k}$$

Quod si iam hic loco x et y scribamus xx et yy , aequatio differentialis fiet

$$\frac{dx}{\sqrt{(B+Cxx+Dxx^2+Ex^6)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(B+Cy+Dy^2+Ey^6)}} = 0,$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{B(xx+yy) + 2Cxxyy + Dxxyy(xx+yy) + 2Exx^4y}{(xx-yy)^2} \pm \frac{2xy\sqrt{(B+Cxx+Dxx^2+Ex^6)(B+Cy+Dy^2+Ey^6)}}{(xx-yy)^2} = \frac{B}{kk}$$

Nunc autem ostendamus, quomodo ope methodi Illustris de la Grange idem integrale impetrari queat.

Analysis.

Pro integratione aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0, \text{ existente } X = B + Cxx + Dx^2 + Ex^3$$

$$Y = B + Cyy + Dy^2 + Ey^3$$

§. 73. Posito igitur

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = dt \text{ erit } \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \mp dt$$

hincque sumtis quadratis

$$\frac{dx^2}{dt^2} = X \text{ et } \frac{dy^2}{dt^2} = Y.$$

Hinc formentur hae aequationes:.

$$\frac{xx dx^2}{dt^2} = xx X \text{ et } \frac{yy dy^2}{dt^2} = yy Y.$$

Iam introducantur duae nouae variables p et q vt fit

$xx + yy = 2p$ et $xx - yy = 2q$, ex quo fit $xx dx + yy dy = d p$, hincque $xx dx^2 - yy dy^2 = d p d q$; quam obrem habebimus

$$\frac{d p d q}{dt^2} = xx X - yy Y,$$

quae aequatio diuidatur per $xx - yy = 2q$, prodibitque

$$\frac{d p d q}{2 q dt^2} = \frac{xx X - yy Y}{xx - yy}$$

quae forma, valoribus pro X et Y substitutis, dabit

$$\frac{d p d q}{2 q dt^2} = B + 2 C p + D (3 p p + q q) + 4 E (p^3 + 1 q q).$$

§. 64. Nunc porro aequationes $\frac{dx^2}{dt^2}$ et $\frac{dy^2}{dt^2}$ differentiatæ dabunt

$$\frac{2 dx dx}{dt^2} = X' \text{ et } \frac{2 dy dy}{dt^2} = Y'.$$

Ex priore fit $\frac{2 x dx dx}{dt^2} = x X'$, cui addatur $\frac{2 dx^2}{dt^2} = 2 X$, vt prodeat

$$\frac{2 (x dx dx + dx^2)}{dt^2} = \frac{2 d. x dx}{dt^2} = x X' + 2 X.$$

Simili

Simili modo erit $\frac{2d.ydy}{d^2} = y Y' + 2 Y$, quae duae aequationes inuicem additae dabunt

$$\frac{2d.dp}{d^2} = \frac{2d.dp}{d^2} = x X' + y Y' + 2 (X + Y).$$

Substitutis autem valoribus et facta substitutione respectu litterarum p et q reperitur

$$2 X + 2 Y = 4 B + 4 C p + 4 D (p p + q q) + 4 E p (p p + 3 q q).$$

Deinde ob

$$X' x = 2 C x x + 4 D x^2 + 6 E x^3 \text{ et}$$

$$y Y' = 2 C y y + 4 D y^2 + 6 E y^3 \text{ erit}$$

$$x X' + y Y' = 4 C p + 8 D (p p + q q) + 12 E p (p p + 3 q q)$$

ex quibus coniunctis fit

$$\begin{aligned} \frac{2d.dp}{d^2} &= 4 B + 8 C p + 12 D (p p + q q) \\ &+ 16 E p (p p + 3 q q). \end{aligned}$$

§. 75. Ab hac formula subtrahatur supra inuenta $\frac{d.p.d.q}{2q.d^2}$ quater sumta, ac remanebit

$$\frac{2d.dp}{d^2} - \frac{2d.p.d.q}{q.d^2} = 8 D q q + 32 E p q q.$$

Nunc utrinque multiplicetur per $\frac{d.p}{q.q}$ et prodibit

$$\frac{2d.p}{d^2} \left(\frac{2d.p.d.dp}{q.q} - \frac{2d.p^2.d.q}{q^2} \right) = 8 D d p + 32 E p d p$$

cuius integrale sponte se offert ita expressum

$$\frac{d.p^2}{q.q.d^2} = 4 \Delta + 8 D p + 16 E p p$$

ideoque extracta radice

$$\frac{d.p}{q.d^2} = 2 \sqrt{\Delta + 2 D p + 4 E p p}.$$

§. 76. Cum nunc sit

$$\frac{d.p}{d^2} = x \sqrt{X} + y \sqrt{Y} \text{ et } 2 q = x x - y y$$

facta substitutione orietur haec aequatio:

$$\frac{x \sqrt{X} + y \sqrt{Y}}{x x - y y} = \sqrt{(\Delta + D' (x x + y y) + E (x x + y y)^2)}$$

quae

quae sumtis quadratis reducetur ad istam formam:

$$\frac{xxX + yyY \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx - yy)^2} = \Delta + D(xx + yy)$$

$$+ E(x^2 + y^2)$$

Est vero

$$xxX + yyY = B(xx + yy) + C(x^2 + y^2)$$

$$+ D(x^6 + y^6) + E(x^4 + y^4)$$

hincque pervenietur ad hanc aequationem

$$\frac{B(xx + yy) + C(x^4 + y^4) + Dxxyy(xx + yy) + 2Ex^4y^4 \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx - yy)^2} = \Delta.$$

§. 77. Sumamus nunc vt supra constantem Δ ita vt posito

$$y = 0 \text{ fiat } x = k \text{ et } X = K = B + Ckk + Dk^6 + Ek^4$$

et aequatio integralis induet hanc formam:

$$\frac{Bxx + C(x^4 + y^4) + Dxxyy(xx + yy) + 2Ex^4y^4 \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx - yy)^2} =$$

$$\frac{B + Ckk}{kk}, \text{ quae aliquanto simplicior euadit si vtrin-}$$

que subtrahamus C : erit enim

$$\frac{B(xx + yy) + 2Cxxyy + Dxxyy(xx + yy) + 2Ex^4y^4 \mp 2xy\sqrt{XY}}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{B}{kk}$$

quae egregie convenit cum integrali supra §. 72. exhibito.

§. 78. Hic casus notatu dignus se offert, dum $B = 0$, tum autem aequatio differentialis ita se habebit:

$$\frac{dx}{x\sqrt{(C + Dxx + Ex^4)}} + \frac{dy}{y\sqrt{(C + Dyy + Ey^4)}} = 0$$

cuius ergo integrale per constantem Δ expressum erit

$$\frac{C(x^4 + y^4) + Dxxyy(xx + yy) + 2Ex^4y^4 \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx - yy)^2} = \Delta.$$

Hoc autem casu integratio non ita determinari potest, vt posito $y = 0$ fiat $x = k$, quia integrale posterioris membri hoc casu manifesto abit in infinitum; quam obrem
alio

alio modo integrationem determinari conueniet veluti vt
posito $y = b$ fiat $x = a$, tum autem erit ista constans

$$\Delta = \frac{C(a^4 + b^4) + D a^2 b^2 (a a + b b) + 2 E a^4 b^4 \mp 2 a b \sqrt{A B}}{(a a - b b)^2}$$

existente

$$A = C + D a a + E a^4 \text{ et } B = C + D b b + E b^4.$$

Conclusio.

§. 79. Qui processum Analyseos hic vsitatae com-
parare voluerit cum methodo, qua Illustris D. *de la Gran-*
ge vsus est in *Miscellan. Taur. Tom. IV.* facile perspiciet,
eam multo facilius ad scopum desideratum perducere at-
que multo commodius ad quosuis casus applicari posse.
Introduxerat autem Vir. Ill. in calculum formulam $\frac{d t}{T}$,
cuius loco hic simplici elemento $d t$ sumus vsi, ac dein-
ceps quantitatem T tanquam functionem literarum p et q
spectauit, quae positio satis difficiles calculos postulauit,
dum nostra methodo longe concinnius easdem integratio-
nes inuestigare licuit. Quanquam autem nullum est du-
bium, quin ista Analyseos species insigne incrementum
polliceatur, tamen nondum patet, quemadmodum ad a-
lias integrationes ea accommodari queat, praeter hos
ipsos casus, quos hic tractauimus et quos olim ex aequa-
tione canonica deriuaueram.

DE REDUCTIONE FORMULARUM INTEGRALIUM AD RECTIFICATIONEM ELLIPSEOS ET HYPERBOLAE.

Auctore

A. L E X E L L.

§. I.

Ex eo tempore quo Illustris *Newtonus* formulas differentiales, quarum integratio per quadraturam circuli vel hyperbolae aequilaterae absoluitur, contemplatus est; primus qui hoc negotium ulterius prosequendo, formulas quoque differentiales ad rectificationem Ellipseos et Hyperbolae reducibiles, examinare instituit, Celebris erat Anglorum Mathematicus *Colin Maclaurin*, quippe qui in II Volumine sui Tractatus de doctrina Fluxionum, nonnulla specimina talium formularum differentialium attulit. Quum vero maxime specialia essent, quae docuerat *Maclaurin*, Illustris *d'Alembert* operae pretium duxit, hanc doctrinam ulterius perficere, quod institutum deinceps Illustris quoque *Eulerus* in quibusdam de hoc argumento Dissertationibus (Nouor. Comment. Tom. VIII et X.) ita prosecutus est, ut vix quidquam ad Ipsius inuenta addi posse videatur. Nec igitur ista, quae hac occasione proponere constitui, si respectus habeatur conclusionum inventarum, prorsus noua sunt; quin potius omnes reductiones heic tradendae in Dissertatione Illustris *Euleri* Tom. X. Nou. Comment. inserta, iam habeantur expositae;

quum

quum vero Methodus, qua ad has reductiones perductus sum, ab illa, qua Illustris *Eulerus* vsus est, prorsus sit diuersa, et vt spero nonnulla non prorsus contemnenda *Analyses* specimina exhibeat, nec Geometris prorsus ingratum fore confido, si ea quae hoc de argumento meditatatus sum, succincte exposuero.

§. 2. Formula igitur differentialis, quam heic imprimis mihi considerandam proposui, ista est $\frac{dz \sqrt{(1+mz^2)}}{\sqrt{(1+nz)}}.$ quae re bene perpenſa, omnino cum illa, quam Illustris *Eulerus* Tom. X. Comment. contemplatus est, congruere inuenitur. Licet enim formula Illustris *Euleri* $dz \sqrt{\frac{f+gz}{b+kzz}}$ latius patere videatur, tamen facile colligitur eandem ad nostram formulam reduci, si ita supponatur expressa:

$$dz \sqrt{\frac{f}{g}} \sqrt{\frac{1+\frac{g}{f}zz}{1+\frac{k}{b}zz}};$$

nam ponendo $\frac{g}{f} = m$, et $\frac{k}{b} = n$, emerget nostra formula per $\sqrt{\frac{f}{g}}$ multiplicata. Patet igitur nostram formulam aequae late patere ac illam Illustris *Euleri*, quare quum calculus eo facilius euadat, quo minor adhibeatur numerus quantitatum, nostrae formulae continuo vsu adhibebimus, vbi tamen formulae istae propositae hanc alteram adiungere necesse est: $dz \sqrt{\frac{1+mzz}{nzz-1}}$, his enim duabus expressionibus, omnes casus formularum differentialium infra contemplandi, continentur.

§. 3. Perfecta enumeratio horum casuum ipsam quidem reductionem formularum differentialium iam sup-

ponit, interim tamen quum ad ea, quae infra tradentur, melius intelligenda, multum conducatur, si enumeratio horum casuum ob oculos ponatur, eam heic statim exponere, animus est. Primum itaque casus heic contemplandi, eo inter se differunt, quod in expressionis denominatore occurrat, vel $\sqrt{1 + nzz}$, vel $\sqrt{1 - nzz}$, vel $\sqrt{mzz - 1}$. Ex prima hypothese pro ratione signi, quo littera m afficitur, sequentes resultant formulae:

$$dz \sqrt{\frac{1 + mzz}{1 + nzz}}; dz \sqrt{\frac{1 - mzz}{1 + nzz}}; dz \sqrt{\frac{mzz - 1}{1 + nzz}}.$$

Secunda hypothesis, pro diuerso signo quantitatis m sequentes suppeditat formulas:

$$dz \sqrt{\frac{1 + mzz}{1 - nzz}}; dz \sqrt{\frac{1 - mzz}{1 - nzz}}; dz \sqrt{\frac{mzz - 1}{1 - nzz}}.$$

Denique ex tertia Hypothese hi sequentes emergunt casus:

$$dz \sqrt{\frac{1 + mzz}{nzz - 1}}; dz \sqrt{\frac{1 - mzz}{nzz - 1}}; dz \sqrt{\frac{mzz - 1}{nzz - 1}}.$$

Tum vero pro singulis his formulis, binae habentur positiones $n > m$ vel $m > n$, exceptis tamen formulis:

$$dz \sqrt{\frac{mzz - 1}{1 - nzz}} \text{ et } dz \sqrt{\frac{1 - mzz}{nzz - 1}},$$

nam pro priori earum, necessario est $m > n$ et pro secunda $n > m$, quippe quum alioquin imaginaria in nostras formulas inducerentur. Nam si pro priori esse posset $n > m$, posita $1 - nzz$ quantitate positua, esse deberet $nzz - 1$, negatiuum, ideoque tanto magis $mzz - 1$ valorem consequeretur negatiuum, vnde necessum est, vt fieret $\sqrt{\frac{mzz - 1}{1 - nzz}}$ imaginarium. Simili quoque ratione demonstratur, non fieri posse, vt sit in expressione

$$\sqrt{\frac{1 - mzz}{nzz - 1}}, m > n.$$

§. 4. Nunc igitur hinc sequentes casus formularum differentialium emergunt:

I. dz

- I. $d z \sqrt{\frac{1+m z z}{1+n z z}}$, posito $n > m$.
- II. $d z \sqrt{\frac{1+m z z}{1+n z z}}$, posito $n < m$.
- III. $d z \sqrt{\frac{1-m z z}{1+n z z}}$, sine vlla restrictione, vti ex infra dicendis patebit.
- IV. $d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{1+n z z}}$, sine vlla restrictione.
- V. $d z \sqrt{\frac{1+m z z}{1-n z z}}$, sine vlla restrictione.
- VI. $d z \sqrt{\frac{1-m z z}{1-n z z}}$, si sit $n > m$.
- VII. $d z \sqrt{\frac{1-m z z}{1-n z z}}$, si sit $m > n$.
- VIII. $d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{1-n z z}}$, vbi necessario $m > n$.
- IX. $d z \sqrt{\frac{1+m z z}{n z z - 1}}$, sine vlla limitatione.
- X. $d z \sqrt{\frac{1-m z z}{n z z - 1}}$, vbi necessario $n > m$.
- XI. $d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{n z z - 1}}$, si sit $n > m$.
- XII. $d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{n z z - 1}}$, si sit $m > n$.

Formulae etenim pro quibus diuersitas casuum $n \leq m$ nihil mutare censenda est, ita comparatae sunt, vt pro vtroque horum casuum reductio eodem modo fiat; cum contra vbi positiones $n > m$ vel $n < m$, ad diuersas perducere censentur conclusiones, formulae differentiales ad rectificationes sectionum conicarum, diuersis plane rationibus reducuntur. Sic ex: causa, formula $d z \sqrt{\frac{1-m z z}{1-n z z}}$ reducitur ad rectificationem Ellipseos, si fuerit $n > m$, ad rectificationem vero Hyperbolae, si sit $m > n$. At formulae $d z \sqrt{\frac{1-m z z}{1+n z z}}$ integrale semper et omni casu, praeter quantitatem algebraicam, binos arcus sectionum conicarum, Ellipseos vnum, alterum Hyperbolae, inuoluit,

Tab. I.
Fig. 5.

§. 5. Quum igitur nunc reductionem formulae differentialis $dz = \sqrt{\frac{1+n^2z^2}{1+n^2z^2}}$ ad rectificationem Ellipseos et Hyperbolae ostensuri simus, primum quidem et ante omnia formulam tradere conueniet, qua arcus quipiam harum Sectionum Conicarum exprimitur. Ponamus igitur esse B L D sectionem quandam Conicam, cuius axis est B F A, foco existente in F, tumque si ad punctum quodpiam D huius sectionis ducatur linea recta F D, eiusque valor per v indicetur, valore anguli B F D per Φ expresso, aequatio pro Sectione Conica relationem harum quantitatum v et Φ exprimens, ita erit comparata: $v = \frac{b}{1+e \cos. \Phi}$, indigitante scilicet b semiparametrum Sectionis Conicae et e ipsius excentricitatem. Hinc si arcus sectionis conicae B D, per s exprimatur, facile perspicitur fore: $ds = \sqrt{(dv^2 + v^2 d\Phi^2)}$, quare quum sit:

$$\begin{aligned} dv &= \frac{b e d\Phi \sin. \Phi}{(1+e \cos. \Phi)^2} \text{ et } v d\Phi = \frac{b d\Phi}{1+e \cos. \Phi}, \text{ fiet} \\ ds^2 &= d\Phi^2 \left(\frac{b^2 e^2 \sin. \Phi^2}{(1+e \cos. \Phi)^4} + \frac{b^2 d\Phi^2}{(1+e \cos. \Phi)^2} \right) \\ &= \frac{b^2 d\Phi^2}{(1+e \cos. \Phi)^4} (1 + 2e \cos. \Phi + e^2), \end{aligned}$$

ideoque

$$ds = \frac{b d\Phi}{(1+e \cos. \Phi)^2} \sqrt{1 + 2e \cos. \Phi + e^2}.$$

Haecque illa est expressio pro arcu Sectionis Conicae, cuius potissimum vsum in sequentibus faciemus. Caeterum facile perspicitur, pro negotio praesenti, statim valorem semiparametri vnitati poni posse aequalem, ita vt vnica quantitas, qua in nostra formula, species Sectionis Conicae definiatur, sola remaneat excentricitas. Et quidem si fuerit $e < 1$, Sectio Conica erit ellipsis, sin vero $e > 1$, ista Sectio erit Hyperbola, tumque si $e = 1$ in Parabolam abiit, pro qua igitur habebitur:

ds

$$ds = d\Phi \frac{\sqrt{z(1 + \cos \Phi)}}{(1 + \cos \Phi)^2} = \frac{d\Phi}{2 \cos \frac{1}{2} \Phi}.$$

Integralibus autem sumtis fiet:

$$s = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{1}{2} \Phi}{\cos \frac{1}{2} \Phi} + \frac{1}{2} L \left(\frac{\cos \frac{1}{2} \Phi}{1 - \sin \frac{1}{2} \Phi} \right),$$

ex quo id confirmatur, quod aliunde quoque constat, arcum Parabolae partim per quantitatem algebraicam, partim etiam per Logarithmum exprimi.

§. 6. Quum id in nostra disquisitione agatur, ut formula $dz \sqrt{\frac{1+mz}{1+nz}}$ ad istam formulam praescriptam $d\Phi \frac{\sqrt{(1+ze \cos \Phi + e^2)}}{(1+e \cos \Phi)^2}$ reducatur, siue etiam huic formulae, vna cum quantitate quapiam algebraica aequalis fiat; facile liquet id negotium perfici, dum pro z idonea quaedam adhibeatur substitutio. Ipsa autem rei natura declarat, idoneas substitutiones pro z illas esse, quibus z statuitur siue directe, seu inuerse proportionalis cuipiam harum fractionum:

$$\frac{\sin \Phi}{1 + e \cos \Phi}; \frac{\sin \Phi}{e + \cos \Phi}; \frac{e + \cos \Phi}{1 + e \cos \Phi}; \frac{\sqrt{(1 + ze \cos \Phi + e^2)}}{\sin \Phi};$$

$$\frac{\sqrt{(1 + ze \cos \Phi + e^2)}}{1 + e \cos \Phi}; \frac{\sqrt{(1 + ze \cos \Phi + e^2)}}{e + \cos \Phi}.$$

Quare quum in sequentibus, huiusmodi expressionum differentialium vsum adhibere necesse sit, ut res in compendium redigatur, nunc statim illa differentialia sequenti schemate repraesentare licebit:

I. $d. \frac{\sin \Phi}{1 + e \cos \Phi} = \frac{d\Phi (e + \cos \Phi)}{(1 + e \cos \Phi)^2};$

II. $d. \frac{1 + e \cos \Phi}{\sin \Phi} = - \frac{d\Phi (e + \cos \Phi)}{\sin \Phi^2};$

III. $d.$

$$\begin{aligned}
 \text{III. } d. \frac{\sin. \Phi}{e + \cos. \Phi} &= \frac{d\Phi (1 + e \cos. \Phi)}{(e + \cos. \Phi)^2}; \\
 \text{IV. } d. \frac{e + \cos. \Phi}{\sin. \Phi} &= - \frac{d\Phi (1 + e \cos. \Phi)}{\sin. \Phi^2}; \\
 \text{V. } d. \frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} &= \frac{(e^2 - 1) d\Phi \sin. \Phi}{(1 + e \cos. \Phi)^2}; \\
 \text{VI. } d. \frac{1 + e \cos. \Phi}{e + \cos. \Phi} &= \frac{(1 - e^2) d\Phi \sin. \Phi}{(e + \cos. \Phi)^2}; \\
 \text{VII. } d. \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{\sin. \Phi} &= - \frac{d\Phi (1 + e \cos. \Phi) (e + \cos. \Phi)}{\sin. \Phi^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}; \\
 \text{VIII. } d. \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{1 + e \cos. \Phi} &= \frac{d\Phi \sin. \Phi (e + \cos. \Phi)}{(1 + e \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}; \\
 \text{IX. } d. \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{e + \cos. \Phi} &= \frac{d\Phi \sin. \Phi (1 + e \cos. \Phi)}{(e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}; \\
 \text{X. } d. \frac{\sin. \Phi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}} &= \frac{d\Phi (1 + e \cos. \Phi) (e + \cos. \Phi)}{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}; \\
 \text{XI. } d. \frac{1 + e \cos. \Phi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}} &= - \frac{d\Phi \sin. \Phi (e + \cos. \Phi)}{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}; \\
 \text{XII. } d. \frac{e + \cos. \Phi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}} &= - \frac{d\Phi \sin. \Phi (1 + e \cos. \Phi)}{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned}$$

§. 7. Quum in superioribus allata sit formula pro arcu sectionis conicae, ad quam igitur reducitur istud differentiale propositum, quoties per solum arcum Ellipseos vel Hyperbolae exprimi potest, nunc etiam e re erit, ut ostendamus, quomodo se habeant formulae, ad quas istud diffe-

differentiale reducitur, quoties siue quantitati algebraicae et arcui Sectionis conicae, seu etiam quantitati algebraicae et binis arcubus Sectionum Conicarum aequetur. Facili autem coniectura assequi licuit, quantitatem istam algebraicam, quae heic in censum venit, vnam fore harum quatuor fractionum:

$$\frac{\sin. \Phi \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1+e \cos. \Phi)(e+\cos. \Phi)}; \frac{(e+\cos. \Phi) \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{\sin. \Phi (1+e \cos. \Phi)};$$

$$\frac{\sin. \Phi (e+\cos. \Phi)}{(1+e \cos. \Phi) \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}; \frac{\sin. \Phi \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1+e \cos. \Phi)(e+\cos. \Phi)};$$

quo supposito, ad sequentia deducti sumus Theoremata:

$$(I.) \int \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1+e \cos. \Phi)^2} = \frac{\sin. \Phi \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1+e \cos. \Phi)(e+\cos. \Phi)} - \int \frac{d\Phi \sin. \Phi^2}{(e+\cos. \Phi)^2 \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}.$$

Est enim

$$d. \frac{\sin. \Phi \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1+e \cos. \Phi)(e+\cos. \Phi)} = \frac{\sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{(e+\cos. \Phi)} \cdot d. \frac{\sin. \Phi}{1+e \cos. \Phi} + \frac{\sin. \Phi}{1+e \cos. \Phi} \cdot d. \frac{\sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{e+\cos. \Phi}$$

$$= \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1+e \cos. \Phi)^2} + \frac{d\Phi \sin. \Phi^2}{(e+\cos. \Phi)^2 \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}},$$

ex quo patet propositum.

§. 8. Theorema autem (II.) ita se habet:

$$\int \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1+e \cos. \Phi)^2} = \frac{(e+\cos. \Phi) \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{(e^2-1)(1+e \cos. \Phi) \sin. \Phi} + \frac{1}{e^2-1} \cdot \int \frac{d\Phi (e+\cos. \Phi)^2}{\sin. \Phi^2 \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}.$$

Est enim

$$d. \frac{(e+\cos. \Phi) \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{\sin. \Phi (1+e \cos. \Phi)} = \frac{\sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{\sin. \Phi} \cdot d. \frac{e+\cos. \Phi}{1+e \cos. \Phi} + \frac{e+\cos. \Phi}{1+e \cos. \Phi} \cdot d. \frac{\sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{\sin. \Phi}$$

$$= \frac{(e^2-1) d\Phi \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1+e \cos. \Phi)^2} - \frac{d\Phi (e+\cos. \Phi)^2}{\sin. \Phi^2 \sqrt{(1+2e \cos. \Phi + e^2)}},$$

hinc sumtis integralibus, colligitur aequalitas Theoremate proposita. Vterius procedendo Theorema (III.) erit:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\Phi \sqrt{(1+e \cos \Phi + e^2)}}{(1+e \cos \Phi)^2} &= \frac{e^2}{e^2-1} \cdot \frac{\sin \Phi (e + \cos \Phi)}{(1+e \cos \Phi) \sqrt{(1+2e \cos \Phi + e^2)}} \\ &+ \frac{1}{e^2-1} \int \frac{d\Phi (1+e \cos \Phi)^2}{(1+2e \cos \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ Nam } d. \frac{\sin \Phi (e + \cos \Phi)}{(1+e \cos \Phi) \sqrt{(1+2e \cos \Phi + e^2)}} \\ &= \frac{\sin \Phi}{\sqrt{(1+2e \cos \Phi + e^2)}} d. \frac{e + \cos \Phi}{1+e \cos \Phi} + \frac{e + \cos \Phi}{1+e \cos \Phi} d. \frac{\sin \Phi}{\sqrt{(1+2e \cos \Phi + e^2)}} \\ &= \frac{(e^2-1) d\Phi \sin \Phi^2}{(1+e \cos \Phi)^2 \sqrt{(1+2e \cos \Phi + e^2)}} + \frac{d\Phi (e + \cos \Phi)^2}{(1+2e \cos \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

hinc fit

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{e^2-1} d. \frac{\sin \Phi (e + \cos \Phi)}{(1+e \cos \Phi) \sqrt{(1+2e \cos \Phi + e^2)}} &= \frac{e^2 d\Phi \sin \Phi^2}{(1+e \cos \Phi)^2 \sqrt{(1+2e \cos \Phi + e^2)}} \\ &+ \frac{e^2}{e^2-1} \cdot \frac{d\Phi (e + \cos \Phi)^2}{(1+2e \cos \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ ideoque} \\ &= \frac{e^2}{e^2-1} d. \frac{\sin \Phi (e + \cos \Phi)}{(1+e \cos \Phi) \sqrt{(1+2e \cos \Phi + e^2)}} \\ &- \frac{1}{e^2-1} \cdot \frac{d\Phi (1+e \cos \Phi)^2}{(1+2e \cos \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{e^2 d\Phi \sin \Phi^2}{(1+e \cos \Phi)^2 \sqrt{(1+2e \cos \Phi + e^2)}} \\ &+ \frac{d\Phi}{e^2-1} \cdot \frac{(e^2 (e + \cos \Phi)^2 - (1+e \cos \Phi)^2)}{(1+2e \cos \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{e^2 d\Phi \sin \Phi^2}{(1+e \cos \Phi)^2 \sqrt{(1+2e \cos \Phi + e^2)}} \\ &+ \frac{d\Phi}{e^2-1} \cdot \frac{(e^4 + 2e^3 \cos \Phi - 1 - 2e \cos \Phi)}{(1+2e \cos \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{e^2 d\Phi \sin \Phi^2}{(1+e \cos \Phi)^2 \sqrt{(1+2e \cos \Phi + e^2)}} + \frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e \cos \Phi + e^2)}} \\ &= \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e \cos \Phi + e^2)}}{(1+e \cos \Phi)^2} \end{aligned}$$

§. 9. Denique Theorema nostrum (IV.) sequenti ratione habetur expressum:

$$e^2 \int \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(1+e\cos\Phi)^2} + \int \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(e+\cos\Phi)^2} \\ = \frac{e^2 \sin\Phi \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(1+e\cos\Phi)(e+\cos\Phi)} + \int \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(e+\cos\Phi)^2 \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}} ?$$

quod sequenti ratione demonstratur,

$$d. \frac{\sin\Phi \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(1+e\cos\Phi)(e+\cos\Phi)} = \frac{\sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{e+\cos\Phi} d. \frac{\sin\Phi}{1+e\cos\Phi} \\ + \frac{\sin\Phi}{1+e\cos\Phi} d. \frac{\sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{e+\cos\Phi}, \text{ hinc} \\ e^2 d. \frac{\sin\Phi \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(1+e\cos\Phi)(e+\cos\Phi)} = e^2 d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(1+e\cos\Phi)^2} \\ + \frac{e^2 d\Phi \sin\Phi}{(e+\cos\Phi)^2 \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}.$$

Porro habetur

$$\frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(e+\cos\Phi)} = \frac{e^2 d\Phi \sin\Phi}{(e+\cos\Phi)^2 \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}} \\ = \frac{d\Phi (1+e\cos\Phi)^2}{(e+\cos\Phi)^2 \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}, \text{ hinc} \\ \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(e+\cos\Phi)^2} = \frac{e^2 d\Phi \sin\Phi + d\Phi (1+e\cos\Phi)^2}{(e+\cos\Phi)^2 \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}} \text{ et} \\ \frac{e^2 d\Phi \sqrt{(1+e\cos\Phi+e^2)}}{(1+e\cos\Phi)^2} + \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(e+\cos\Phi)^2} \\ = \frac{e^2 d\Phi \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(1+e\cos\Phi)^2} + \frac{e^2 d\Phi \sin\Phi + d\Phi (1+e\cos\Phi)^2}{(e+\cos\Phi)^2 \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}} ?$$

vnde veritas nostrae propositionis omnino est manifesta.

§. 10. His igitur praemissis, iam ipsum negotium adgredi licebit, vbi quidem primum dispiciendum est, quomodo differentiale $dz \sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$ comparatum esse oportet, vt ad formulam $d\Phi \sqrt{\frac{(1+2e\cos\Phi+e^2)}{(1+e\cos\Phi)^2}}$ reductionem admittat. Breuitatis autem gratia in differentiali proposito, loco numeratoris $\sqrt{(1+mzz)}$ vel $\sqrt{(mzz-1)}$ litteram Z adhibebimus et pro denominatore $\sqrt{(1+nzz)}$ vel $\sqrt{(nzz-1)}$ littera Z' in vsum vocetur, quare pro casu praesenti dum differentiale $dz \cdot \frac{Z}{Z'}$ ad formam

$$d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(1+e\cos\Phi)^2}$$

reducendum est, id agitur vt pro z idoneae adhibeantur substitutiones. Quare quum in denominatore formulae propositae occurrat $(1 + e \cos. \Phi)^2$, facile colligitur pro z eiusmodi adhibendam esse fractionem, in cuius denominatore etiam occurrit $1 + e \cos. \Phi$, vnde ansa nobis supeditatur, statuendi siue

$$z = \frac{\lambda \sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}, \text{ siue } z = \frac{\lambda (e + \cos. \Phi)}{1 + e \cos. \Phi},$$

nam de substitutione

$$z = \frac{\lambda \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{1 + e \cos. \Phi}$$

infra videbimus, eam non succedere.

§. 11. Ponamus igitur primum $z = \frac{\lambda \sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}$, ex quo fiet $d z = \frac{\lambda d \Phi (e + \cos. \Phi)}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$, tumque vt differentiale $d z$, $\frac{z}{z'}$, formam adipiscatur

$$d \Phi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

facile colligitur necesse esse, vt fit

$$Z = \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{1 + e \cos. \Phi} \text{ et } Z' = \frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}.$$

Patet igitur heic pro Z non aliam quam hanc expressionem $\sqrt{(1 + m z z)}$ valere, nam

$$1 - m z z = \frac{1 + 2e \cos. \Phi + e^2 \cos. \Phi^2 - m \lambda^2 \sin. \Phi^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

nullo modo ad istam formam

$$\frac{1 + 2e \cos. \Phi + e^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$$

reduci potest, quod idem quoque valet de $m z z - 1$. Erit itaque

$$\begin{aligned} 1 + m z z &= \frac{1 + 2e \cos. \Phi + e^2 \cos. \Phi^2 + m \lambda^2 \sin. \Phi^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2} \\ &= \frac{1 + 2e \cos. \Phi + e^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2}, \end{aligned}$$

posito $m \lambda^2 = e^2$, siue $\lambda = \frac{e}{\sqrt{m}}$, tum vero consequimur

$$Z =$$

$$Z' = V(1 \pm n z z) = \frac{V(1 + 2e \cos \Phi + e^2 \cos^2 \Phi + \frac{n e^2}{m} \sin^2 \Phi)}{1 + e \cos \Phi}$$

$$= \frac{V(1 + \frac{n e^2}{m} + 2e \cos \Phi + (e^2 + \frac{n e^2}{m}) \cos^2 \Phi)}{1 + e \cos \Phi};$$

ideoque si fuerit

$$1 + \frac{n e^2}{m} = e^2, \text{ siue } e^2 = \frac{m}{n + m},$$

obtinemus

$$Z' = \frac{V(e^2 + 2e \cos \Phi + \cos^2 \Phi)}{1 + e \cos \Phi} = \frac{e \cos \Phi}{1 + e \cos \Phi}.$$

Hincque fiet

$$d z \cdot \frac{Z}{Z'} = \lambda d \Phi \frac{V(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}{(1 + e \cos \Phi)^2}$$

$$= \frac{e}{V m} d \Phi \frac{V(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}{(1 + e \cos \Phi)^2},$$

vbi est

$$Z = V(1 + m z z) \text{ et } Z' = V(1 + n z z).$$

Si n positivum habeat valorem, necessum est ut sit $m > n$, nam alioquin valor ipsius e fieret imaginarius, ideoque illo etiam casu $e > 1$, hincque differentiale $d z \cdot V \frac{1 + m z z}{1 + n z z}$ posito $m > n$, erit pro arcu Hyperbolico, qui est casus II. §. 4. allatus. At vero si n negativum afficiatur signo, fiet e omni casu reale et quidem < 1 , ideoque differentiale $V \frac{1 + m z z}{1 + n z z}$ semper et omni casu per rectificationem arcus Elliptici exprimetur, vnde formulam nostram V. §. 4. allata emergit. Cacterum sponte intelligitur casu praesenti pro Z' nequaquam $V(n z z - 1)$ adhiberi posse, quippe quod fieret

$$= \frac{V(n \lambda^2 \sin^2 \Phi - 1 - 2e \cos \Phi - e^2 \cos^2 \Phi)}{1 + e \cos \Phi},$$

ideoque nulla ratione ad formam

$$\frac{e + \cos \Phi}{1 + e \cos \Phi} \text{ reduci posset.}$$

§. 12. Nunc vero denuo statuamus $z = \frac{\lambda(e + \cos. \Phi)}{1 + e \cos. \Phi}$, unde obtinebimus $dz = \lambda(e^2 - 1) \frac{d\Phi \sin. \Phi}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$, hincque ut differentiale propositum ad formam $d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$ reducatur, necessum est ut sit:

$$Z = \mu \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{1 + e \cos. \Phi} \text{ et } Z' = \frac{\mu \sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}.$$

Heic autem patet pro denominatore non adhiberi posse, nisi has binas formas:

$Z' = \sqrt{(1 - n z^2)}$, vel $Z' = \sqrt{(n z z - 1)}$, siquidem

$$1 + n z z = \frac{1 + 2e \cos. \Phi + e^2 \cos. \Phi^2 + n \lambda^2 (e^2 + 2e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

nullo modo ad formam $\frac{\sin. \Phi^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$, se reduci patiatur. Habebimus itaque

$$1 - n z z = \frac{1 + 2e \cos. \Phi + e^2 \cos. \Phi^2 - n \lambda^2 (e^2 + 2e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$$

$$= \frac{(1 - e^2) \sin. \Phi^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

si nimirum ponatur $n \lambda^2 = 1$, siue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$, tum vero vicissim erit

$$n z z - 1 = \frac{(e^2 - 1) \sin. \Phi^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2}.$$

Pro numeratore autem Z adhiberi debet vel $1 - m z z$, vel $m z z - 1$, priori casu est

$$1 - m z z = \frac{1 + 2e \cos. \Phi + e^2 \cos. \Phi^2 - \frac{m}{n} (e^2 + 2e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

vbi si statuatur $\frac{m}{n} = e^2$ fiet

$$1 - m z z = \frac{1 - e^4 + 2e \cos. \Phi (1 - e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2} = (1 - e^2) \frac{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

similique ratione erit

$$m z z - 1 = (e^2 - 1) \frac{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

vbi quidem mox liquet pro suppositione $1 - n z z$, adhibendum

esse

esse $1 - m z z$, et vicissim adhibito $n z z - 1$, in usum vocari debere $m z z - 1$, nisi calculum quantitibus imaginariis implicare velimus. Hinc itaque sequentes binæ oriuntur æqualitates:

$$dz \sqrt{\frac{1 - m z z}{1 - n z z}} = \frac{e^2 - 1}{\sqrt{n}} d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos \Phi)^2} \text{ et}$$

$$dz \sqrt{\frac{m z z - 1}{n z z - 1}} = \frac{e^2 - 1}{\sqrt{n}} d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos \Phi)^2}.$$

In priori casu est $n > m$, ideoque $e < 1$, unde arcus sectionis conicæ erit ellipticus, nec heic poni potest $m > n$, quippe quum tunc esset $1 - m z z < 1 - n z z$, ideoque esse deberet $1 + 2e \cos \Phi + e^2 < \sin^2 \Phi$, quod fieri nequit, ob $\cos^2 \Phi + 2e \cos \Phi + e^2 > 0$. Posteriori casu est $m > n$, hinc $e > 1$, et arcus hyperbolicus, nam si statueretur $n > m$, fieret $m z z - 1 < n z z - 1$, ideoque iterum

$$1 + 2e \cos \Phi + e^2 < \sin^2 \Phi,$$

quod fieri nequit. Prior igitur horum casuum is est, qui §. 4. No. VI. designatur, posterior vero is, qui sub No. XII. occurrit, et hi quidem quatuor casus formulæ nostræ differentialis modo allati, ii sunt, quorum integratio non nisi unicum arcum sectionis conicæ, siue Ellipticum, seu Hyperbolicum supponit.

§. 13. Si substitutionem,

$$z = \frac{\lambda \sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}}{1 + e \cos \Phi}$$

tentare vellemus, ob

$$dz = \frac{\lambda d\Phi \sin \Phi (e + \cos \Phi)}{(1 + e \cos \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}}, \text{ esse deberet } \frac{z}{z^2}$$

$$= \frac{1 + 2e \cos \Phi + e^2}{\sin \Phi (e + \cos \Phi)},$$

quæ æqualitas subsistere non potest, quia in fractione ista

$$\frac{1 + 2e \cos \Phi + e^2}{\sin \Phi (e + \cos \Phi)}$$

tam

tam numerator, quam denominator, ad secundum dignitatis gradum euectus sit, quod nequaquam pro valoribus quantitatum Z et Z' locum habere potest.

§. 14. Progrediamur igitur nunc ad formam in Theoremate nostro (1) occurrentem :

$$\frac{d \Phi \sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}$$
 et dispiciamus, quos valores pro z substituere oporteat, vt formula $d z \cdot \frac{Z}{Z'}$, ad formam hanc propositam reducat. Heic vero quum statim pateat, denominatorem valoris pro z substituendi, esse $e + \cos. \Phi$, quia in denominatore formae propositae occurrit $(e + \cos. \Phi)^2$, ponamus primum:

$$z = \lambda \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{e + \cos. \Phi},$$
 ex quo colligitur

$$d z = \frac{\lambda d \Phi \sin. \Phi (1 + e \cos. \Phi)}{(e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}},$$
 hincque conficitur esse debere,

$$Z = \frac{\mu \sin. \Phi}{e + \cos. \Phi}, \text{ et } Z' = \frac{\mu (1 + e \cos. \Phi)}{e + \cos. \Phi},$$

ita vt iam pateat pro Z , non nisi hanc formam

$\sqrt{(m z z - 1)}$ adhiberi posse, nam neque

$$1 + m z z = \frac{e^2 + 2e \cos. \Phi + \cos. \Phi^2 + m \lambda^2 (1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}{(e + \cos. \Phi)^2},$$

nec

$$1 - m z z = \frac{e^2 + 2e \cos. \Phi + \cos. \Phi^2 - m \lambda^2 (1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}{(e + \cos. \Phi)^2},$$

ullo modo huic expressioni $\frac{\mu^2 \sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2}$, reddi possunt aequales. Nam priori casu ob m positium, quantitates $2e \cos. \Phi + 2m \lambda^2 e \cos. \Phi$ elidi non possunt, posteriori vero casu si ponatur $m \lambda^2 = 1$, fiet

$$1 - m z z = \frac{\cos. \Phi^2 - 1}{(e + \cos. \Phi)^2} = - \frac{\sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2},$$

hinc

hinc itaque concluditur

$$m z z - 1 = \frac{\sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2},$$

posito nimirum $m \lambda^2 = 1$, siue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{m}}$. Tum vero fiet

$$1 \pm n z z = \frac{e^2 + 2e \cos. \Phi + \cos. \Phi^2 + \frac{n}{m} (1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}{(e + \cos. \Phi)^2}$$

$$= \frac{(1 + \frac{n}{m}) (1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2} + \frac{(e^2 - 1 + \frac{n e^2}{m}) \sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2},$$

posito igitur

$$1 = e^2 (1 \pm \frac{n}{m}) = e^2 (\frac{m \pm n}{m}), \text{ siue } e = \sqrt{\frac{m}{m \pm n}},$$

fiet

$$1 \pm n z z = \frac{(1 + e \cos. \Phi)^2}{e^2 (e + \cos. \Phi)^2}, \text{ hincque } Z' = \frac{1 + e \cos. \Phi}{e(e + \cos. \Phi)},$$

unde demum deducitur

$$d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{1 \pm n z z}} = \frac{e d \sin. \Phi^2}{\sqrt{m} e + \cos. \Phi^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}} \\ = \frac{d \Phi \sin. \Phi^2}{\sqrt{(m \pm n) (e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}}.$$

Si pro n signum adhibeatur positivum et $e^2 = \frac{m}{m+n}$, ideoque $e < 1$, hinc integratio formulae $d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{1 + n z z}}$ praestabitur per quantitatem algebraicam et arcum ellipticum, qui est Casus IV. §. 4. At si $e^2 = \frac{m}{m-n}$, necessum est ut ponatur $m > n$, ideoque $e > 1$, hinc formulae

$d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{1 - n z z}}$ posito $m > n$, integrale dabitur per quantitatem algebraicam et arcum Hyperbolicum, qui Casus est VIII. §. 4.

§. 15. Ponamus deinde $z = \lambda \frac{(1 + e \cos. \Phi)}{e + \cos. \Phi}$, unde fit

$$d z = (1 - e^2) \frac{\lambda d \sin. \Phi}{(e + \cos. \Phi)^2},$$

ideoque quum esse debeat

$$d z. \frac{Z}{Z'} = \frac{d \Phi \sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}},$$

vel saltem huic quantitati proportionale, colligitur

$$Z = \frac{\mu \sin. \Phi}{e + \cos. \Phi} \text{ et } Z' = \frac{\mu' \sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}}{e + \cos. \Phi}.$$

Heic itaque mox liquet pro Z vel $\sqrt{(1 - m z z)}$, vel $\sqrt{(m z z - 1)}$ adhibendum esse, priori casu fit

$$1 - m z z = \frac{e^2 + 2 e \cos. \Phi + \cos. \Phi^2 - m \lambda^2 (1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2},$$

vbi si statuatur $m \lambda^2 = 1$, fiet

$$1 - m z z = \frac{(e^2 - 1) \sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2},$$

hincque vicissim

$$m z z - 1 = \frac{(1 - e^2) \sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2}.$$

Pro denominatore autem Z' , nunc non nisi has expressiones $\sqrt{(1 - n z z)}$, vel $\sqrt{(n z z - 1)}$ adhibere oportet, estque

$$\begin{aligned} 1 - n z z &= \frac{(e + \cos. \Phi)^2 - \frac{n}{m} (1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2} \\ &= \frac{(1 - \frac{n}{m}) (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2) - \sin. \Phi^2 (1 - \frac{n}{m} e^2)}{(e + \cos. \Phi)^2}, \end{aligned}$$

ideoque si sit $1 = \frac{n}{m} e^2$, seu $e = \sqrt{\frac{m}{n}}$, erit

$$\begin{aligned} 1 - n z z &= (1 - \frac{n}{m}) \frac{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(e + \cos. \Phi)^2} \\ &= \frac{e^2 - 1}{e^2} \cdot \frac{1 + 2 e \cos. \Phi + e^2}{(e + \cos. \Phi)^2}, \text{ et vicissim} \\ n z z - 1 &= \frac{1 - e^2}{e^2} \cdot \frac{1 + 2 e \cos. \Phi + e^2}{(e + \cos. \Phi)^2}. \end{aligned}$$

Quare fiet

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z'} &= \frac{e \sin. \Phi}{\sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}} \text{ et } d z. \frac{Z}{Z'} = \frac{e (1 - e^2) \lambda d \Phi \sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}} \\ &= \frac{1 - e^2}{\sqrt{n}} \frac{d \Phi \sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi) \sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}}, \end{aligned}$$

hinc itaque Casus formulae nostrae VII et XI. derivantur §. 4. Pro priori autem $d z \sqrt{(\frac{1 - m z z}{1 - n z z})}$, praescribitur

vt sit $m > n$, ideoque $e > 1$, nam si $m < n$, fieret $1 - m z z > 1 - n z z$
hoc est $(e^2 - 1) \sin. \Phi^2 > \frac{e^2 - 1}{e^2} (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)$, siue
 $e^2 \sin. \Phi^2 > 1 + 2 e \cos. \Phi + e^2$, ideoque

$$0 > 1 + 2 e \cos. \Phi + e^2 \cos. \Phi^2,$$

quod esset absonum, integratio igitur formulae istius

$$dz \sqrt{\left(\frac{1 - m z z}{1 - n z z}\right)} \text{ posito } m > n,$$

perficitur partim per quantitatem algebraicam, partim ar-
cu Hyperbolae. Pro posteriori formula $dz \sqrt{\frac{m z z - 1}{n z z - 1}}$, neces-
sum est vt sit $m < n$, ideoque $e < 1$, nam si esset $m > n$,
fieret quoque $m z z - 1 > n z z - 1$, hincque vti supra

$$e^2 \sin. \Phi^2 > 1 + 2 e \cos. \Phi + e^2,$$

quod omnino fieri nequit, proinde integratio formulae
huius posterioris, quantitate algebraica et arcu Elliptico
absoluitur.

§. 16. Sicque igitur iam expediuimus Casus for-
mulae nostrae IV. VIII. VII. XI, quorum integratio quan-
titem algebraicam et arcum siue Ellipticum seu Hyper-
bolicum inuoluit, ita vt nunc non remaneant nisi quatuor
casus nimirum I. III. IX. X, quorum integratio praeter
quantitatem algebraicam, binos arcus Sectionum Conica-
rum, vnum Ellipticum, alterum Hyperbolicum inuoluit;
hi autem casus formulae propositae omnes et singuli se
reduci patiuntur ad istud differentiale, quod Theoremate
nostro (IV) occurrit $\frac{d\Phi(1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}}$. Antequam
vero hanc reductionem suscipiamus, hanc praeter rem e-
rit, vt dispiciamus, quinam casus nostrae formulae se re-
duci patiantur ad differentialia

$$\frac{d\Phi(e + \cos.\Phi)^2}{\sin.\Phi^2 \sqrt{(1 + 2e \cos.\Phi + e^2)}} \text{ et } \frac{d\Phi(1 + e \cos.\Phi)^2}{(1 + 2e \cos.\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quae nostris Theorematibus (II) et (III) occurrunt.

§. 17. Pro differentiali dz , $\frac{z}{Z}$, ad istam formam

$$\frac{d\Phi(e + \cos.\Phi)^2}{\sin.\Phi^2 \sqrt{(1 + 2e \cos.\Phi + e^2)}}$$

reducendo, primum poni conveniet

$$z = \frac{\lambda \sqrt{(1 + 2e \cos.\Phi + e^2)}}{\sin.\Phi}, \text{ vnde deducitur}$$

$$dz = -\lambda d\Phi \frac{(1 + e \cos.\Phi)(e + \cos.\Phi)}{\sin.\Phi^2 \sqrt{(1 + 2e \cos.\Phi + e^2)}},$$

hincque esse debet

$$Z = \mu \frac{(e + \cos.\Phi)}{\sin.\Phi} \text{ et } Z' = \mu' \frac{(1 + e \cos.\Phi)}{\sin.\Phi},$$

quod omnino procedet, si statuatur $Z = \sqrt{(mzz - 1)}$, tum enim fiet

$$\begin{aligned} mzz - 1 &= \frac{m\lambda^2(1 + 2e \cos.\Phi + e^2) - \sin.\Phi^2}{\sin.\Phi^2} \\ &= \frac{e^2 + 2e \cos.\Phi + \cos.\Phi^2}{\sin.\Phi^2}, \end{aligned}$$

posito $m\lambda^2 = 1$, siue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{m}}$. Deinde vero fiet

$$Z' = \sqrt{(nzz - 1)}, \text{ est enim}$$

$$\begin{aligned} nzz - 1 &= \frac{n}{m} \frac{(1 + 2e \cos.\Phi + e^2) - \sin.\Phi^2}{\sin.\Phi^2} \\ &= \frac{n}{m} \frac{(1 + 2e \cos.\Phi + e^2 \cos.\Phi^2)}{\sin.\Phi^2} + \left(\frac{ne^2}{m} - 1\right), \end{aligned}$$

ideoque si statuatur

$$e^2 = \frac{m}{n}, \text{ fiet } nzz - 1 = \frac{(1 + e \cos.\Phi)^2}{e^2 \sin.\Phi^2}.$$

Hinc itaque colligitur

$$\begin{aligned} dz \sqrt{\frac{mzz - 1}{nzz - 1}} &= - \frac{\lambda e d\Phi(e + \cos.\Phi)^2}{\sin.\Phi^2 \sqrt{(1 + 2e \cos.\Phi + e^2)}} \\ &= - d\Phi \frac{(e + \cos.\Phi)^2}{\sqrt{n \sin.\Phi} \sqrt{(1 + 2e \cos.\Phi + e^2)}}. \end{aligned}$$

Et quum pro casu praesenti, tam esse possit $m > n$, quam

$$m < n,$$

$m < n$, consequimur hinc Casus nostros XI. et XII., prior scilicet locum habet, si fuerit $m < n$, posterior vero si statuatur $m > n$. Quum verò supra inuenerimus formulam nostram XII. ad solum arcum Hyperbolicum reduci, nunc omnino e re effat, vt ostenderetur reductionem modo inuentam, cum illa quae §. 12. allata est, plane conuenire. Verum tamen ne filium nostrae disquisitionis abrumptur, hoc examen reseruabimus, vsque dum omnes reductiones ad finem perducere nobis licuerit.

§. 18. Altera substitutio pro praesenti casu, illa est, qua statuitur $z = \lambda \frac{(1 + e \cos. \Phi)}{\sin. \Phi}$, vnde colligitur

$$dz = -\lambda d\Phi \frac{(e + \cos. \Phi)}{\sin. \Phi^2}$$

quamobrem fiet

$$Z = \mu \frac{(e + \cos. \Phi)}{\sin. \Phi} \text{ et } Z' = \mu' \sqrt{1 + 2e \cos. \Phi + e^2}.$$

Haec vero statim liquet pro Z' , non nisi istam formam

$\sqrt{1 + n z z}$ adhiberi posse, quippe pro qua colligitur:

$$1 + n z z = \frac{\sin. \Phi^2 + n \lambda^2 (1 + e \cos. \Phi)^2}{\sin. \Phi^2} = \frac{1 + 2e \cos. \Phi + e^2}{e^2 \sin. \Phi^2},$$

si fuerit $n \lambda^2 = \frac{1}{e^2}$. Pro numeratore autem Z , adhiberi potest $\sqrt{m z z + 1}$, eritque

$$m z z + 1 = \frac{m}{n} \cdot \frac{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2 \cos. \Phi^2)}{e^2 \sin. \Phi^2} + \frac{e^2 \sin. \Phi^2}{e^2 \sin. \Phi^2}$$

$$= \frac{m}{n} \frac{(\cos. \Phi^2 + 2e \cos. \Phi + e^2)}{e^2 \sin. \Phi^2} + \frac{(\frac{m}{n} - \frac{m}{n} e^2 + e^2) \sin. \Phi^2}{e^2 \sin. \Phi^2},$$

vnde si ponatur

$$\frac{m}{n} = (\frac{m}{n} + 1) e^2, \text{ seu } e^2 = \frac{m}{m + n}, \text{ fiet}$$

$$Z = \sqrt{\frac{m}{n} \frac{(\cos. \Phi + e)}{e \sin. \Phi}},$$

ideoque erit

$$\begin{aligned} d z \cdot \frac{Z}{Z'} &= d z \sqrt{\frac{m z z + 1}{1 + n z z}} \\ &= -\lambda d \Phi \sqrt{\frac{m}{n} \cdot \frac{(e + \cos \Phi)^2}{\sin \Phi^2 \sqrt{(1 + 2 e \cos \Phi + e^2)}}} \\ &= -\frac{\sqrt{(m + n)}}{n} d \Phi \frac{(e + \cos \Phi)^2}{\sin \Phi^2 \sqrt{(1 + 2 e \cos \Phi + e^2)}}. \end{aligned}$$

Casus igitur nostri differentialis II. et IV. hinc deriuntur, pro priori est $m > n$, ut e valorem fortiaur realem, fitque $e > 1$, ideoque pro integratione arcum hyperbolicum adhibere necesse est, pro posteriori autem est $e < 1$, ideoque arcus Ellipticus in usum vocandus.

§. 19. Ulterius procedendo formula

$$\frac{d \Phi (1 + e \cos \Phi)^2}{(1 + 2 e \cos \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ad formam differentialis propositi reducetur, ponendo

$$z = \frac{\lambda \sin \Phi}{\sqrt{(1 + 2 e \cos \Phi + e^2)}},$$

hinc enim fit

$$d z = \frac{\lambda d \Phi (1 + e \cos \Phi) (e + \cos \Phi)}{(1 + 2 e \cos \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

tumque colligitur

$$Z = \frac{\mu (1 + e \cos \Phi)}{\sqrt{(1 + 2 e \cos \Phi + e^2)}} \text{ et } Z' = \frac{\mu' (e + \cos \Phi)}{\sqrt{(1 + 2 e \cos \Phi + e^2)}}$$

Si itaque statuatur $Z = \sqrt{(1 - m z z)}$, consequemur

$$\begin{aligned} 1 - m z z &= \frac{1 + 2 e \cos \Phi + e^2 - m \lambda^2 \sin \Phi^2}{1 + 2 e \cos \Phi + e^2} \\ &= \frac{(1 + e \cos \Phi)^2}{1 + 2 e \cos \Phi + e^2} \end{aligned}$$

posito $m \lambda^2 = e^2$, tum vero erit

$$1 - n z z = \frac{1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2 - \frac{n e^2}{m} \sin. \Phi^2}{1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2}$$

$$= \frac{(\operatorname{cof.} \Phi + e)^2}{1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2}, \text{ posito}$$

$$1 - \frac{n e^2}{m} = 0, \text{ siue } e^2 = \frac{m}{n}. \text{ Hinc igitur erit}$$

$$d z \cdot \frac{z}{z'} = d z \sqrt{\frac{1 - m z z}{1 - n z z}} = \frac{\lambda d \Phi (1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2}{(1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{d \Phi (1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2}{\sqrt{n (1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}},$$

vnde casus nostri differentialis VI. et VII. deriuantur, dum pro priori est $n > m$, ideoque $e < 1$, quod valet pro arcu Elliptico, pro posteriori autem est $m > n$, hincque $e > 1$, quod indicat arcum Hyperbolicum.

§. 20. Deinde differentiale propositum, ad formam

$$\frac{d \Phi (1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2}{(1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

quoque reducetur, ponendo

$$z = \frac{\lambda (e + \operatorname{cof.} \Phi)}{\sqrt{(1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2)}}, \text{ vnde colligitur}$$

$$d z = - \frac{\lambda d \Phi \sin. \Phi (1 + e \operatorname{cof.} \Phi)}{(1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

hinc facile perspicitur esse debere

$$Z = \frac{\mu (1 + e \operatorname{cof.} \Phi)}{\sqrt{(1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2)}} \text{ et } Z' = \frac{\mu' \sin. \Phi}{\sqrt{(1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2)}},$$

ex quo patescit, statui debere $Z' = \sqrt{(1 - n z z)}$, fiet autem tum

$$1 - n z z = \frac{1 + 2e \cos. \Phi + e^2 - n \lambda^2 (e^2 + 2e \cos. \Phi + \cos. \Phi^2)}{1 + 2e \cos. \Phi + e^2}$$

$$= \frac{(1 - e^2) \sin. \Phi}{1 + 2e \cos. \Phi + e^2},$$

si fuerit $n \lambda^2 = 1$. Tumque habebimus $Z = \sqrt{m z z \pm 1}$,
ita vt fit

$$m z z \pm 1 = \frac{m (\cos. \Phi^2 + 2e \cos. \Phi + e^2) + (1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}{1 + 2e \cos. \Phi + e^2}$$

$$= \frac{(\frac{m}{n} + 1) (1 + 2e \cos. \Phi + e^2 \cos. \Phi^2)}{1 + 2e \cos. \Phi + e^2}$$

$$= \frac{\sin. \Phi^2 (\frac{m}{n} - \frac{m}{n} e^2 + e^2)}{1 + 2e \cos. \Phi + e^2},$$

vbi si ponatur

$$\frac{m}{n} = e^2 (\frac{m}{n} \pm 1), \text{ siue } e^2 = \frac{m}{m \pm n}, \text{ erit } \sqrt{m z z \pm 1}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{n} \cdot \frac{1 + e \cos. \Phi}{e \sqrt{1 + 2e \cos. \Phi + e^2}}}.$$

Hinc fiet

$$d z. \frac{z}{Z} = - \frac{\lambda}{e} \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \frac{d \Phi (1 + e \cos. \Phi)^2}{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= - \frac{\sqrt{m+n}}{n} \cdot \frac{d \Phi (1 + e \cos. \Phi)^2}{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

per hanc igitur reductionem, formularum nostrarum Nris.
V. et VIII. §. 4. occurrentium integratio perficitur, vbi
quidem pro priori earum, in qua $1 + m z z$ occurrit, nulla
adhibenda est limitatio, ob $e^2 = \frac{m}{m+n}$ semper positium,
erit vero tum $e < 1$, ideoque integratio rectificationem
arcus Elliptici inuoluet. Quodsi vero habeatur $m z z - 1$,
praescribitur vt fit $m > n$, quia alioquin e fieret imagina-
rium, existente autem e reali, erit > 1 , vnde integratio
rectificationem arcus hyperbolici supponit.

§. 21. Iam denique si differentiale $d z \cdot \frac{z}{z'}$ ad istam formam:

$$\frac{d \Phi (1 + e \cos \Phi)^2}{(e + \cos \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2 e \cos \Phi + e^2)}}$$

reducendum fit, adhibeatur primum substitutio

$$z = \frac{\lambda \sin \Phi}{e + \cos \Phi}, \text{ vnde } d z = \frac{\lambda d \Phi (1 + e \cos \Phi)}{(e + \cos \Phi)^2}.$$

Tum vero patet esse debere,

$$Z = \mu \frac{(1 + e \cos \Phi)}{e + \cos \Phi} \text{ et } Z' = \mu' \frac{\sqrt{(1 + 2 e \cos \Phi + e^2)}}{e + \cos \Phi},$$

hincque pro Z' non nisi haec formula $\sqrt{(1 + n z z')}$ adhiberi potest, eritque

$$\begin{aligned} 1 + n z z' &= \frac{e^2 + 2 e \cos \Phi + \cos^2 \Phi + n \lambda^2 \sin^2 \Phi}{(e + \cos \Phi)^2} \\ &= \frac{1 + 2 e \cos \Phi + e^2}{(e + \cos \Phi)^2}, \end{aligned}$$

si ponatur $n \lambda^2 = 1$. Pro Z autem adhibendo

$\sqrt{(1 + m z z')}$, consequimur

$$\begin{aligned} 1 + m z z' &= \frac{e^2 + 2 e \cos \Phi + \cos^2 \Phi + \frac{m}{n} \sin^2 \Phi}{(e + \cos \Phi)^2} \\ &= \frac{1 + 2 e \cos \Phi + e^2 \cos^2 \Phi}{(e + \cos \Phi)^2} + \frac{\sin^2 \Phi (e^2 - 1 + \frac{m}{n})}{(e + \cos \Phi)^2}, \end{aligned}$$

hincque si ponatur

$$e^2 = 1 + \frac{m}{n} = \frac{n + m}{n}, \text{ fiet } 1 + m z z' = \frac{(1 + e \cos \Phi)^2}{(e + \cos \Phi)^2},$$

vnde concluditur

$$\begin{aligned} d z \cdot \frac{z}{z'} &= \frac{\lambda d \Phi (1 + e \cos \Phi)^2}{(e + \cos \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2 e \cos \Phi + e^2)}} \\ &= \frac{d \Phi (1 + e \cos \Phi)^2}{\sqrt{n (e + \cos \Phi)^2} \sqrt{(1 + 2 e \cos \Phi + e^2)}}. \end{aligned}$$

Per hanc igitur reductionem Casus Formulae nostrae I. et III. conficiuntur, scilicet $d z \sqrt{\frac{1 + m z z'}{1 + n z z'}}$, existente $n > m$, quia alioquin e fieret imaginarium, tumque $d z \sqrt{\frac{1 - m z z'}{1 + n z z'}}$ sine vlla limitatione, quippe quum valor ipsius e semper fiat realis, siue n maior, seu minor quam m supponatur.

§. 22. Alteram reductionem differentialis $dz \cdot \frac{z}{Z}$, ad formam

$$\frac{d\Phi (1 + e \cos \Phi)^2}{(e + \cos \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}},$$

praebet substitutio, qua ponitur

$$z = \frac{\lambda \sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}}{e + \cos \Phi}, \text{ unde fit}$$

$$dz = \frac{\lambda d\Phi \sin \Phi (1 + e \cos \Phi)}{(e + \cos \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}},$$

tumque esse debet

$$Z = \mu \frac{(1 + e \cos \Phi)}{e + \cos \Phi} \text{ et } Z' = \frac{\mu' \sin \Phi}{e + \cos \Phi},$$

quamobrem pro Z' adhibere conueniet $\sqrt{(nzz - 1)}$, eritque

$$\begin{aligned} nzz - 1 &= \frac{n\lambda^2 (1 + 2e \cos \Phi + e^2) - (e^2 + 2e \cos \Phi + \cos^2 \Phi)}{(e + \cos \Phi)^2} \\ &= \frac{\sin^2 \Phi}{(e + \cos \Phi)^2}, \end{aligned}$$

si ponatur $n\lambda^2 = 1$, tum vero erit pro Z ,

$$\begin{aligned} 1 + mzz &= 1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}{(e + \cos \Phi)^2} \\ &= \left(1 + \frac{m}{n}\right) \frac{(1 + 2e \cos \Phi + e^2 \cos^2 \Phi)}{(e + \cos \Phi)^2} \\ &\quad + \sin^2 \Phi \frac{(e^2 - 1 + \frac{m}{n} e^2)}{(e + \cos \Phi)^2}, \end{aligned}$$

unde si statuatur $e^2 (1 + \frac{m}{n}) = 1$, seu $e^2 = \frac{n}{n+m}$, fiet

$$1 + mzz = \frac{(1 + e \cos \Phi)^2}{e^2 (e + \cos \Phi)^2}, \text{ proinde fiet}$$

$$\begin{aligned} dz \cdot \frac{z}{Z} &= \frac{\lambda d\Phi}{e} \cdot \frac{(1 + e \cos \Phi)^2}{(e + \cos \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}} \\ &= \frac{\sqrt{(n+m)} d\Phi (1 + e \cos \Phi)^2}{n (e + \cos \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}}, \end{aligned}$$

et hac reductione iam Casus IX. et X. nostrae formulae differentialis absoluuntur, vbi quidem pro priori

$$dz \sqrt{\frac{1+mzz}{nzz-1}}$$

nulla praescribitur conditio, quia e semper fiet reale, pro posteriori autem seu $dz \sqrt{\frac{1-mzz}{nzz-1}}$ necessario esse debet

$$n < m,$$

$n > m$, quum alioquin e valorem fortiretur imaginarium. Quatuor proinde Casus nostrae formulae differentialis, quorum integratio praeter quantitatem algebraicam, binos arcus vnum Ellipticum, alterum Hyperbolicum inuoluit, isti sequentes sunt, I. III. IX. X.

§. 23. Nunc quoque operae pretium erit, vt discipiamus quomodo reductiones, istae quae pro eodem casu duplices occurrunt, inter se conciliari queant. Et primum quidem si proposita fuerit formula $d \approx \sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$ posito $m > n$, in §. 11. inuenimus esse:

posito
$$d \approx \sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}} = \frac{e}{\sqrt{m}} d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(1+e\cos\Phi)^2},$$

$$z = \frac{e}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sin\Phi}{1+e\cos\Phi},$$
 ex §. 18. vero constat esse:

posito
$$d \approx \sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}} = -\frac{\sqrt{(m-n)}}{n} \cdot \frac{d\psi(e+\cos\psi)^2}{\sin\psi^2 \sqrt{(1+2e\cos\psi+e^2)}},$$

$$z = \frac{1}{e\sqrt{n}} \cdot \frac{1+e\cos\psi}{\sin\psi},$$
 pro utroque casu existente $e = \sqrt{\frac{m}{m-n}}$.

Hinc itaque concluditur esse debere
$$= -\frac{n}{m-n} \cdot \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(1+e\cos\Phi)^2} = -\frac{\sin\psi^2 \sqrt{(1+2e\cos\psi+e^2)}}{(e^2-1)} \cdot \frac{d\psi \sqrt{(1+2e\cos\psi+e^2)}}{(1+e\cos\psi)^2},$$

iam vero per Theorema (II.) colligitur

$$\frac{1}{e^2-1} \int \frac{d\psi(e+\cos\psi)^2}{\sin\psi^2 \sqrt{(1+2e\cos\psi+e^2)}} = \int \frac{d\psi \sqrt{(1+2e\cos\psi+e^2)}}{(1+e\cos\psi)^2} - \frac{(e+\cos\psi) \sqrt{(1+2e\cos\psi+e^2)}}{(e^2-1)(1+e\cos\psi)\sin\psi},$$

quamobrem esse debet

$$\int \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\cos\Phi+e^2)}}{(1+e\cos\Phi)^2} + \int \frac{d\psi \sqrt{(1+2e\cos\psi+e^2)}}{(1+e\cos\psi)^2} = \frac{(e+\cos\psi) \sqrt{(1+2e\cos\psi+e^2)}}{(e^2-1)\sin\psi(1+e\cos\psi)}.$$

Cuius propositionis demonstratio sequenti ratione adornatur: quia

$$\frac{e}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sin\Phi}{1+e\cos\Phi} = \frac{1}{e\sqrt{n}} \cdot \frac{1+e\cos\psi}{\sin\psi}$$

colligitur

$$e \sqrt{e^2 - 1} \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{1 + e \cos. \Psi}{\sin. \Psi},$$

hincque

$$\frac{\sin. \Phi \sqrt{e^2 - 1}}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{1 + e \cos. \Psi}{e \sin. \Psi},$$

ex quo deducitur

$$\frac{(1 + e \cos. \Phi)^2 + \sin. \Phi^2 (e^2 - 1)}{(1 + e \cos. \Phi)^2} = \frac{(1 + e \cos. \Psi)^2 + e^2 \sin. \Psi^2}{e^2 \sin. \Psi^2},$$

frue

$$\begin{aligned} \frac{(\cos. \Phi + e)^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2} &= \frac{1 + 2e \cos. \Psi + e^2}{e^2 \sin. \Psi^2} \text{ et} \\ \frac{\cos. \Phi + e}{1 + e \cos. \Phi} &= \frac{\sqrt{1 + 2e \cos. \Psi + e^2}}{e \sin. \Psi}, \end{aligned}$$

vicissim autem erit

$$\frac{\cos. \Psi + e}{1 + e \cos. \Psi} = \frac{\sqrt{1 + 2e \cos. \Phi + e^2}}{e \sin. \Phi}.$$

Fiet proinde

$$\frac{(e + \cos. \Psi) \sqrt{1 + 2e \cos. \Phi + e^2}}{(e^2 - 1) \sin. \Psi (1 + e \cos. \Psi)} = \frac{e}{e^2 - 1} \cdot \frac{(e + \cos. \Psi) (e + \cos. \Phi)}{(1 + e \cos. \Psi) (1 + e \cos. \Phi)},$$

cuius differentiale erit

$$\begin{aligned} \frac{e d \Phi \sin. \Phi}{(1 + e \cos. \Phi)^2} \frac{(e + \cos. \Psi)}{(1 + e \cos. \Psi)} + \frac{e d \Psi \sin. \Psi}{(1 + e \cos. \Psi)^2} \frac{(e + \cos. \Phi)}{(1 + e \cos. \Phi)}, \\ = d \Phi \frac{\sqrt{1 + 2e \cos. \Phi + e^2}}{(1 + e \cos. \Phi)^2} + d \Psi \frac{\sqrt{1 + 2e \cos. \Psi + e^2}}{(1 + e \cos. \Psi)^2}, \text{ ob} \\ e \sin. \Phi \frac{(e + \cos. \Psi)}{1 + e \cos. \Psi} = \sqrt{1 + 2e \cos. \Phi + e^2}, \end{aligned}$$

et vicissim

$$e \sin. \Psi \frac{(e + \cos. \Phi)}{1 + e \cos. \Phi} = \sqrt{1 + 2e \cos. \Psi + e^2}.$$

Egregium igitur hinc colligitur Theorema Geometricum, quod nimirum si in Hyperbola constituentur ad focum bini anguli Φ et Ψ ita comparati, ut sit

$$\sqrt{e^2 - 1} \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{1 + e \cos. \Psi}{e \sin. \Psi},$$

tum summam binorum arcuum Hyperbolae his angulis respondentium, aequalem esse quantitati algebraicae

$$\frac{e}{e^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned} & \frac{e}{e^2 - 1} \cdot \frac{(e + \cos. \Phi) (e + \cos. \Psi)}{(1 + e \cos. \Phi) (1 + e \cos. \Psi)} + C \\ &= \frac{(e + \cos. \Phi) (e + \cos. \Psi)}{(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \sin. \Phi \sin. \Psi} + C. \end{aligned}$$

§. 24. Porro si reductiones formulae $d \approx \sqrt{\frac{1+mz}{1-nz}}$

§§. 11. et 20. traditas, inte se comparemus, consequimur has aequationes:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1 - e^2)} \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{e + \cos. \Psi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}} \text{ et} \\ & d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Phi)^2} = \frac{d\Psi (1 + e \cos. \Psi)^2}{(e^2 - 1) (1 + 2e \cos. \Psi + e^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -d\Psi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Psi)^2} + \frac{e^2}{e^2 - 1} d \cdot \frac{\sin. \Psi (e + \cos. \Psi)}{(1 + e \cos. \Psi) \sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}} \end{aligned}$$

ideoque heic demonstrari debet, esse

$$\begin{aligned} & \int d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Phi)^2} + \int d\Psi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Psi)^2} = C \\ & - \frac{e^2}{1 - e^2} \frac{\sin. \Psi (e + \cos. \Psi)}{(1 + e \cos. \Psi) \sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}} \\ &= C - \frac{e^2}{\sqrt{(1 - e^2)}} \frac{\sin. \Psi \sin. \Phi}{(1 + e \cos. \Psi) (1 + e \cos. \Phi)}, \end{aligned}$$

existente

$e = \sqrt{\frac{m}{m+n}}$. Quum igitur sit

$$\begin{aligned} & \frac{\sin. \Phi \sqrt{(1 - e^2)}}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{e + \cos. \Psi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}}, \text{ fiet } \frac{(1 + e \cos. \Phi)^2 - \sin. \Phi^2 (1 - e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2} \\ &= \frac{1 + 2e \cos. \Psi + e^2 - (e + \cos. \Psi)^2}{1 + 2e \cos. \Psi + e^2}, \end{aligned}$$

ideoque

$$\frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{\sin. \Psi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}},$$

nec non

$$\frac{\sin. \Phi \sqrt{(1 - e^2)}}{e + \cos. \Phi} = \frac{e + \cos. \Psi}{\sin. \Psi};$$

quare fieri oportet

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos\Phi + e^2)}}{(1+e\cos\Phi)^2} + \int d\psi \frac{\sqrt{(1+2e\cos\psi + e^2)}}{(1+e\cos\psi)^2} \\ = C - \frac{e^2}{1-e^2} \cdot \frac{(e+\cos\Phi)(e+\cos\psi)}{(1+e\cos\Phi)(1+e\cos\psi)}$$

Sumto autem differentiali fractionis

$$\frac{e^2}{e^2-1} \cdot \frac{(e+\cos\Phi)(e+\cos\psi)}{(1+e\cos\Phi)(1+e\cos\psi)},$$

habebimus

$$\frac{e^2 d\Phi \sin\Phi}{(1+e\cos\Phi)^2} \cdot \frac{(e+\cos\psi)}{(1+e\cos\psi)} + \frac{e^2 d\psi \sin\psi}{(1+e\cos\psi)^2} \cdot \frac{(e+\cos\Phi)}{(1+e\cos\Phi)} \\ = \frac{e^2 d\Phi \sin\Phi}{(1+e\cos\Phi)^2 \sqrt{(1+2e\cos\Phi + e^2)}} + \frac{e^2 d\psi \sin\psi}{(1+e\cos\psi)^2 \sqrt{(1+2e\cos\psi + e^2)}}, \text{ ob } \frac{e+\cos\Phi}{1+e\cos\Phi} \\ = \frac{\sin\psi}{\sqrt{(1+2e\cos\psi + e^2)}} \text{ et vicissim} \\ \frac{e+\cos\psi}{1+e\cos\psi} = \frac{\sin\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos\Phi + e^2)}},$$

quare ut veritas propositionis sibi constet, necessum quoque est fore:

$$d\Phi \frac{(1+2e\cos\Phi + e^2\cos\Phi^2)}{(1+e\cos\Phi)^2 \sqrt{(1+2e\cos\Phi + e^2)}} \\ + d\psi \frac{(1+2e\cos\psi + e^2\cos\psi^2)}{(1+e\cos\psi)^2 \sqrt{(1+2e\cos\psi + e^2)}} = 0,$$

hoc est

$$\frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos\Phi + e^2)}} + \frac{d\psi}{\sqrt{(1+2e\cos\psi + e^2)}} = 0,$$

id quod sequenti ratiocinio confirmatur, ob

$$\frac{\sqrt{(1+2e\cos\Phi + e^2)}}{\sin\Phi} = \frac{1+e\cos\psi}{e+\cos\psi}, \text{ fiet} \\ \frac{d\Phi(1+e\cos\Phi)(e+\cos\Phi)}{\sin\Phi^2 \sqrt{(1+2e\cos\Phi + e^2)}} = (e^2-1) \frac{d\psi \sin\psi}{(e+\cos\psi)^2},$$

hinc

$$\frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos\Phi + e^2)}} = (e^2-1) \frac{d\psi \sin\psi \sin\Phi^2}{(1+e\cos\psi)(e+\cos\psi)(e+\cos\psi^2)} \\ = - \frac{\sqrt{(1-e^2)} d\psi \sin\psi}{(1+e\cos\psi)(e+\cos\psi)} = - \frac{d\psi}{\sqrt{(1+2e\cos\psi + e^2)}},$$

ob $\sin\Phi \sin\psi \sqrt{(1-e^2)} = (e+\cos\Phi)(e+\cos\psi)$ et

$$\frac{\sin\Phi \sqrt{(1-e^2)}}{1+e\cos\Phi} = \frac{e+\cos\psi}{\sqrt{(1+2e\cos\psi + e^2)}}.$$

Hinc

Hinc elegans quoque istud Theorema comprobatur, quod si ad focus Ellipseos, a vertice eius, constituentur bini anguli Φ et Ψ ita comparati, ut sit

$\sin. \Phi \sin. \Psi \sqrt{1 - e^2} = (e + \cos. \Phi) (e + \cos. \Psi)$,
tum summam binorum arcuum Ellipticorum his angulis respondentium, esse aequalem quantitati algebraicae:

$$\frac{e^2}{e^2 - 1} \cdot \frac{(e + \cos. \Phi) (e + \cos. \Psi)}{(1 + e \cos. \Phi) (1 + e \cos. \Psi)} + C.$$

§. 25. Deinde si conferamus inter se reductiones formulae VI. $d z \sqrt{\frac{1 - m z z}{1 - n z z}}$, posito $n > m$, §§. 12. et 19. institutas, has obtinebimus aequationes:

$$\begin{aligned} \frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} &= \frac{\sin. \Psi}{\sqrt{(1 + 2 e \cos. \Psi + e^2)}} \text{ et} \\ (e^2 - 1) d \Phi &\frac{\sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Phi)^2} \\ d \Psi &\frac{(1 + e \cos. \Psi)^2}{(1 + 2 e \cos. \Psi + e^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

posito $e = \sqrt{\frac{m}{n}}$, vnde per Theorema (III.) colligetur:

$$\begin{aligned} \int d \Phi \frac{\sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Phi)^2} + \int d \Psi \frac{\sqrt{(1 + 2 e \cos. \Psi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Psi)^2} \\ = \frac{e^2}{e^2 - 1} \cdot \frac{\sin. \Psi (e + \cos. \Psi)}{(1 + e \cos. \Psi) \sqrt{(1 + 2 e \cos. \Psi + e^2)}}, \end{aligned}$$

demonstratio autem huius propositionis §. praecedenti iam est allata, quia aequalitas

$$\frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{\sin. \Psi}{\sqrt{(1 + 2 e \cos. \Psi + e^2)}},$$

omnino congruit cum illa:

$$\frac{\sin. \Phi \sqrt{(1 - e^2)}}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{e + \cos. \Psi}{\sqrt{(1 + 2 e \cos. \Psi + e^2)}}.$$

Denique reductiones formulae XII. $d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{n z z - 1}}$, posito $m > n$, §§. 12. et 17. institutas, inter se conferendo, colli-

ligimus:

$$\frac{e + \cos \Phi}{1 + e \cos \Phi} = \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos \Psi + e^2)}}{e \sin \Psi} \text{ et}$$

$$d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos \Phi)^2} = d\Psi \frac{(e + \cos \Psi)^2}{(1 - e^2) \sin \Psi \sqrt{(1 + 2e \cos \Psi + e^2)}}$$

ex quo per Theorema (II.) conficitur:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos \Phi)^2} + \int d\Psi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos \Psi + e^2)}}{(1 + e \cos \Psi)^2}$$

$$= C + \frac{(e + \cos \Psi) \sqrt{(1 + 2e \cos \Psi + e^2)}}{(e^2 - 1) \sin \Psi (1 + e \cos \Psi)}$$

$$= C + \frac{e(e + \cos \Psi)(e + \cos \Phi)}{(e^2 - 1)(1 + e \cos \Psi)(1 + e \cos \Phi)},$$

cuius propositionis demonstratio iam §. 23. est allata.

§ 26. Porro si ulterius procedendo, reductiones formulae IV. §§. 14. et 18. institutae, inter se conferantur, has obtinebimus aequationes

$$\frac{\sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}}{e + \cos \Phi} = \frac{1 + e \cos \Psi}{\sin \Psi \sqrt{(1 - e^2)}} \text{ et}$$

$$\frac{d\Phi \sin \Phi^2}{(e + \cos \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}} = \frac{d\Psi (e + \cos \Psi)^2}{(e^2 - 1) \sin \Psi^2 \sqrt{(1 + 2e \cos \Psi + e^2)}},$$

vnde per Theoremata (I.) et (II.) concludetur:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos \Phi)^2} + \int d\Psi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos \Psi + e^2)}}{(1 + e \cos \Psi)^2}$$

$$= -\frac{\sin \Phi \sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos \Phi)(e + \cos \Phi)} - \frac{(e + \cos \Psi) \sqrt{(1 + 2e \cos \Psi + e^2)}}{(1 - e^2) \sin \Psi (1 + e \cos \Psi)} + C,$$

quae expressio algebraica ob

$$\frac{\sin \Psi \sqrt{(1 - e^2)}}{e + \cos \Psi} = \frac{\sin \Phi}{e + \cos \Phi},$$

in hanc abit:

$$\frac{\sin \Phi}{e + \cos \Phi} \left(\frac{\sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}}{1 + e \cos \Phi} - \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos \Psi + e^2)}}{\sqrt{(1 - e^2)}(1 + e \cos \Psi)} \right),$$

et denuo ob

$$\frac{\sqrt{(1 + 2e \cos \Psi + e^2)}}{1 + e \cos \Psi} = \frac{1 + e \cos \Phi}{\sqrt{(1 - e^2)}(1 + 2e \cos \Phi + e^2)},$$

in hanc

$$\frac{\sin \Phi}{e + \cos \Phi} \left(\frac{\sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}}{1 + e \cos \Phi} - \frac{1 + e \cos \Phi}{(1 - e^2) \sqrt{(1 + 2e \cos \Phi + e^2)}} \right),$$

cuius

cuius quantitatis facta evolutione, istam demum consequimur expressionem:

$$\frac{+e^2}{e^2-1} \cdot \frac{\sin. \Phi (e + \cos. \Phi)}{(1 + e \cos. \Phi) \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}} = \frac{e^2}{e^2-1} \cdot \frac{(e + \cos. \Phi) (e + \cos. \Psi)}{(1 + e \cos. \Phi) (1 + e \cos. \Psi)}$$

quam iam supra §. 24, cum istis formulis integralibus congruere inuenimus. Vterius si reductiones pro formula VIII. §§. 14. et 20 allatae, inter se conferantur, hae prodibunt aequationes:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(e^2-1)} (1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}{e + \cos. \Phi} &= \frac{e (e + \cos. \Psi)}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}} \text{ et} \\ &\int \frac{d \Phi \sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}} \\ &= - \frac{1}{e^2-1} \cdot \int \frac{d \Psi (1 + e \cos. \Psi)^2}{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

vnde per Theoremata nostra (I.) et (III.) colligitur:

$$\begin{aligned} \int d \Phi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Phi)^2} + \int d \Psi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Psi)^2} \\ = C + \frac{\sin. \Phi \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Phi) (e + \cos. \Phi)} \\ + \frac{e^2}{e^2-1} \frac{\sin. \Psi (e + \cos. \Psi)}{(1 + e \cos. \Psi) \sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}}, \end{aligned}$$

hinc quum sit per §. 23.

$$\begin{aligned} \frac{e \sin. \Psi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}} &= \frac{1 + e \cos. \Phi}{e + \cos. \Phi} \text{ et} \\ \frac{e + \cos. \Psi}{1 + e \cos. \Psi} &= \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{e \sin. \Phi}, \end{aligned}$$

quantitas ista algebraica in hanc abibit:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{e + \cos. \Phi} \left(\frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} + \frac{1 + e \cos. \Phi}{(e^2-1) \sin. \Phi} \right) \\ = \frac{(e + \cos. \Phi) \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{(e^2-1) \sin. \Phi (1 + e \cos. \Phi)} \end{aligned}$$

cuius quantitatis aequalitas cum integralibus istis, iam supra §. 23. est demonstrata.

§. 27. Nunc quoque comparisonem instituendo reductionum pro formula VII. §§. 15. et 19. institutarum, ad has pertingemus aequationes:

$$\frac{1+e \cos \Phi}{e+\cos \Phi} = \frac{e \sin \Psi}{\sqrt{(1+2e \cos \Psi+e^2)}} \text{ et}$$

$$\int \frac{d\Phi \sin \Phi^2}{(e+\cos \Phi)^2 \sqrt{(1+2e \cos \Phi+e^2)}} =$$

$$\frac{1}{1-e^2} \int \frac{d\Psi (1+e \cos \Psi)^2}{(1+2e \cos \Psi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quarum expressionum aequalitas modo a nobis est demonstrata. Tum vero demum, instituta comparatione reductionum pro formula XI. $dz \sqrt{\frac{mz-1}{nz-1}}$, casu $m < n$, §§. 15. et 17. institutarum, has obtinebimus aequationes:

$$\frac{1+e \cos \Phi}{e+\cos \Phi} = \frac{\sqrt{(1+2e \cos \Psi+e^2)}}{\sin \Psi} \text{ et}$$

$$\int \frac{d\Phi \sin \Phi^2}{(e+\cos \Phi)^2 \sqrt{(1+2e \cos \Phi+e^2)}} =$$

$$\frac{1}{e^2-1} \int \frac{d\Psi (e+\cos \Psi)^2}{\sin \Psi^2 \sqrt{(1+2e \cos \Psi+e^2)}},$$

quod cum veritate consentire, iam in §. modo antecedenti est demonstratum.

§. 28. Hinc igitur iam facile perspicitur, quomodo singuli casus nostrae formulae differentialis expediri queant, quicunque valores litteris m et n tribuantur, nisi quaequam harum quantitatum vel evanescat, vel in infinitum abeat; quibus casibus euenit, ut integrale vel per rectificationem parabolae, vel quadraturam circuli exprimatur, vel denique algebraicum consequatur valorem. Ne igitur quidquam in hac nostra disquisitione deficere videatur, iam etiam expendamus, quomodo integralia talium formularum ex nostris quoque praeceptis derivari queant. Casus igitur ubi primum vel m vel n evanescere supponitur,

nitur, sunt hi sequentes:

$$dz \sqrt{(1 + mzz)}; dz \sqrt{(1 - mzz)};$$

$$dz \sqrt{(mzz - 1)}; \text{posito } n = 0;$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(1 + nzz)}}; \frac{dz}{\sqrt{(1 - nzz)}}; \frac{dz}{\sqrt{(nzz - 1)}}, \text{posito } m = 0.$$

Si prima harum formularum conferatur cum illis, quas contemplati sumus, videbimus esse $e = 1$, ideoque fiet

$$dz \sqrt{(1 + mzz)} = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{d\Phi \sqrt{2(1 + \cos. \Phi)}}{(1 + \cos. \Phi)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{d\Phi}{2 \cos. \frac{1}{2} \Phi^2}, \text{posito}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sin. \Phi}{1 + \cos. \Phi} = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \text{Tang. } \frac{1}{2} \Phi.$$

Secunda harum formularum nimirum $dz \sqrt{(1 - mzz)}$, expeditur ope formulae III. §. 21. vbi $\frac{1}{e} = 0$, tum enim fiet:

$$e \sqrt{n} = \sqrt{(n + m)} = \sqrt{m} \text{ et } \frac{\lambda}{e} = \frac{1}{e \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{m}},$$

quare erit

$$dz \sqrt{(1 - mzz)} = \frac{\lambda d\Phi (1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}$$

$$= \frac{\lambda}{e} d\Phi \cdot \cos. \Phi^2 = \frac{1}{\sqrt{m}} d\Phi \cdot \cos. \Phi^2, \text{posito}$$

$$z = \frac{\lambda \sin. \Phi}{e + \cos. \Phi} = \frac{\lambda}{e} \sin. \Phi = \frac{\sin. \Phi}{\sqrt{m}}.$$

Deinde formula $dz \sqrt{(mzz - 1)}$ reducitur ad casus nostros IV. et VIII. §. 14. posito $e = 1$, eritque

$$dz \sqrt{(mzz - 1)} = \frac{d\Phi \sin. \Phi^2}{\sqrt{m} (1 + \cos. \Phi)^2 \sqrt{2(1 + \cos. \Phi)}}$$

$$= \frac{d\Phi \cdot \sin. \frac{1}{2} \Phi^2}{2 \sqrt{m} \cdot \cos. \frac{1}{2} \Phi^2},$$

quod omnino rite se habet, posito $z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m} (1 + \cos. \Phi)}$.

§. 29. Vtlius procedendo, pro casibus vbi m statuitur $= 0$, differentiale $\frac{dz}{\sqrt{(1 + nzz)}}$ reducitur ad Casus

nostros I. vel III, statuendo $e = 1$, tum vero fit

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+nzz)}} = \frac{d\phi}{\sqrt{2n(1+\cos\phi)}} = \frac{d\phi}{2\sqrt{n\cos\frac{1}{2}\phi}}, \text{ vbi}$$

$$z = \frac{\sin\phi}{\sqrt{n(1+\cos\phi)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{Tang.} \frac{1}{2}\phi.$$

Tum differentiale $\frac{dz}{\sqrt{(1-nzz)}}$ per formulas V. et VI. expeditur, posito $e = 0$, (vid. §. 11. vel 12.) eritque

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-nzz)}} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot d\phi,$$

prouti ponatur z vel $= \frac{\sin\phi}{\sqrt{n}}$ vel $z = \frac{\cos\phi}{\sqrt{n}}$. Denique differentiale $\frac{dz}{\sqrt{(nzz-1)}}$ per Formulas nostras IX. et X. expeditur §. 22, vbi $e = 1$, eritque

$$\frac{dz}{\sqrt{(nzz-1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{2(1+\cos\phi)}} = \frac{d\phi}{2\sqrt{n\cos\frac{1}{2}\phi}},$$

posito

$$z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n(1+\cos\phi)}} = \frac{1}{\sqrt{n\cos\frac{1}{2}\phi}}.$$

§. 30. Formulae hucusque consideratae facile expediuntur, maius autem negotium faciunt, illae, pro quibus statuitur sine m , seu n infinito aequale, quae sequentes sunt:

$$\frac{dz}{z} \sqrt{(1+mzz)}; \quad \frac{dz}{z} \sqrt{(1-mzz)};$$

$$\frac{dz}{z} \sqrt{(mzz-1)} \text{ posito } n = \infty.$$

$$\frac{zdz}{\sqrt{(1+nzz)}}; \quad \frac{zdz}{\sqrt{(1-nzz)}}; \quad \frac{zdz}{\sqrt{(nzz-1)}}, \text{ posito } m = \infty.$$

Si primum horum differentialium ad Formam IX. §. 22. reducere vellemus, consequeremur $e = 1$, tum vero esse deberet:

$$z = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\cos\phi)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n(1+\cos\phi)}},$$

quod

quod suppositionem dat incongruam. Loco igitur anguli Φ , introducamus in calculum angulum ψ ita comparatum, ut sit :

$$\sqrt{(1 - e^2)} \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{e + \cos. \psi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \psi + e^2)}} \text{ et } \\ \frac{1 + e \cos. \Phi}{e + \cos. \Phi} = \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \psi + e^2)}}{\sin. \psi}.$$

Hinc differentiando colligitur:

$$(1 - e^2) \frac{d\Phi \sin. \Phi}{(e + \cos. \Phi)^2} = - \frac{d\psi (1 + e \cos. \psi) (e + \cos. \psi)}{\sin. \psi^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \psi + e^2)}},$$

unde multiplicando per

$$\frac{(1 + e \cos. \Phi)^2}{(1 - e^2) \sin. \Phi^2} = \frac{1 + 2e \cos. \psi + e^2}{(e + \cos. \psi)^2},$$

producitur,

$$\frac{d\Phi (1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \sin. \Phi} = - \frac{d\psi (1 + e \cos. \psi) \sqrt{(1 + 2e \cos. \psi + e^2)}}{\sin. \psi (e + \cos. \psi)},$$

denique facta multiplicatione per

$$\frac{\sin. \Phi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}} = \frac{e + \cos. \psi}{1 + e \cos. \psi},$$

concluditur

$$\frac{d\Phi (1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}} = - \frac{d\psi}{\sin. \psi^2} \sqrt{(1 + 2e \cos. \psi + e^2)};$$

proinde erit

$$\frac{dz}{z} \sqrt{(1 + m z z)} = - \frac{d\psi}{\sin. \psi^2} \sqrt{2(1 + \cos. \psi)}, \text{ vbi } \\ z = \lambda \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{e + \cos. \Phi} = \frac{\lambda (1 + e \cos. \psi)}{\sqrt{(1 - e^2)} \sin. \psi} = \frac{1 + e \cos. \psi}{\sqrt{m} \sin. \psi}, \text{ ob } \\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } \sqrt{(1 - e^2)} = \sqrt{\frac{m}{n + m}} = \sqrt{\frac{m}{n}}, \text{ posito } n = \infty.$$

§. 31. Secundum horum differentialium ad Formam III. §. 21. reduceretur quidem, fieretque $e = 1$, verum substitutio :

$$z = \frac{\lambda \sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{\sin. \Phi}{\sqrt{n} (1 + e \cos. \Phi)}$$

incongrua euadit, quapropter iam angulum ψ in calculum introducamus ita comparatum, ut sit

$$e \sqrt{e^2 - 1} \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{1 + e \cos. \Psi}{\sin. \Psi},$$

nec non

$$\sqrt{e^2 - 1} \frac{\sin. \Phi}{e + \cos. \Phi} = \frac{1 + e \cos. \Psi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}},$$

vnde differentiando eruitur:

$$\sqrt{e^2 - 1} \frac{d\Phi (1 + e \cos. \Phi)}{(e + \cos. \Phi)^2} = - \frac{d\Psi \sin. \Psi (e + \cos. \Psi)}{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

tumque multiplicando per

$$\frac{1 + e \cos. \Phi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}} = \sqrt{e^2 - 1} \frac{\sin. \Psi}{e + \cos. \Psi},$$

obtinebimus:

$$\frac{d\Phi (1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}} = - \frac{d\Psi \sin. \Psi^2}{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quare fiet

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z} \sqrt{(1 - m z z)} &= - \frac{d\Psi \sin. \Psi^2}{(2 + 2 \cos. \Psi)^{\frac{3}{2}}} \\ &= - \frac{d\Psi \sin. \Psi^2}{8 \cos. \frac{1}{2} \Psi^3} = - \frac{d\Psi \sin. \frac{1}{2} \Psi^2}{2 \cos. \frac{1}{2} \Psi}, \end{aligned}$$

posito

$$z = \frac{\lambda \sin. \Phi}{e + \cos. \Phi} = \frac{\lambda (1 + e \cos. \Psi)}{\sqrt{(e^2 - 1)} \sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}}.$$

At pro casu praesenti est, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sqrt{e^2 - 1} = \sqrt{\frac{m}{n}}$, hinc $\frac{\lambda}{\sqrt{(e^2 - 1)}} = \frac{1}{\sqrt{m}}$, vnde erit

$$z = \frac{1 + \cos. \Psi}{\sqrt{2m} (1 + \cos. \Psi)} = \frac{\cos. \frac{1}{2} \Psi}{\sqrt{m}},$$

et facta hac substitutione, formulas differentiales perfecte congruere facile perspicietur. Denique $\frac{dz}{z} \sqrt{(m z z - 1)}$ ad formulas IV. vel XI. reducitur per §. 14. et 15. posito

fito $e = 0$, tumque fiet:

$$\frac{dz}{z} \sqrt{(mzz - 1)} = \frac{d\Phi \sin. \Phi^2}{\cos. \Phi^2}, \text{ posito } z = \frac{1}{\sqrt{m} \cos. \Phi}.$$

§. 32. Nunc si differentiale $\frac{z dz}{\sqrt{(1 + nzz)}}$ ad formulam II. §. 11, reducere vellemus, ponendum esset $z = \frac{\sin. \Phi}{\sqrt{(1 + \cos. \Phi)}}$, existente $e = 1$ et m infinito, quae substitutio incongrua est, huic autem incommodo medela adfertur, statuendo

$$\frac{1 + e \cos. \Psi}{\sin. \Psi} = e \sqrt{(e^2 - 1)} \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}, \text{ siue}$$

$$\frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}}{e \sin. \Psi},$$

unde fit

$$(e^2 - 1) \frac{d\Phi \sin. \Phi}{(1 + e \cos. \Phi)^2} = - \frac{d\Psi (1 + e \cos. \Psi) (e + \cos. \Psi)}{e \sin. \Psi^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}}$$

et multiplicando per

$$\frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{\sin. \Phi} = \frac{e (\cos. \Psi + e)}{1 + e \cos. \Psi};$$

$$(e^2 - 1) \frac{d\Phi \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Phi)^2} = - \frac{d\Psi (e + \cos. \Psi)^2}{\sin. \Psi^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}},$$

quare fit

$$\frac{z dz}{\sqrt{(1 + nzz)}} = \frac{e d\Phi \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{m (1 + e \cos. \Phi)^2};$$

$$= - \frac{e d\Psi (e + \cos. \Psi)^2}{m (e^2 - 1) \sin. \Psi^2 \sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}}.$$

Est vero $e^2 - 1 = \frac{n}{m-n} = \frac{n}{m}$, ob $m = \infty$, hinc erit $m(e^2 - 1) = n$, ideoque ob $e = 1$,

$$\frac{z dz}{\sqrt{(1 + nzz)}} = - \frac{d\Psi (1 + \cos. \Psi)^2}{n \sin. \Psi^2 \sqrt{(1 + \cos. \Psi)}}$$

$$= - \frac{d\Psi \cos. \frac{1}{2} \Psi}{2 n \sin. \frac{1}{2} \Psi^2}, \text{ posito}$$

$$z = \frac{e}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{e \sqrt{(e^2 - 1)}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{1 + e \cos. \Psi}{\sqrt{n} \sin. \Psi},$$

hinc ob $e = 1$, $z = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \cot. \frac{1}{2} \Psi$. Deinde si propositum fuerit differentiale $\frac{z dz}{\sqrt{(1 + nzz)}}$, quod sub Formula nostra V. comprehenditur, idem occurrit incongruum, quod supposito

fitio $z = \frac{e}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}$, subsistere nequeat, posito autem

$$\sqrt{(1 - e^2)} \cdot \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{e + \cos. \Psi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)}},$$

fit differentiendo:

$$\sqrt{(1 - e^2)} \frac{d\Phi (e + \cos. \Phi)}{(1 + e \cos. \Phi)^2} = - \frac{d\Psi \sin. \Psi (1 + e \cos. \Psi)}{(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et multiplicando per

$$\frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{e + \cos. \Phi} = \frac{1 + e \cos. \Psi}{\sin. \Psi \sqrt{(1 - e^2)}}, \text{ erit}$$

$$\frac{d\Phi \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Phi)^2} = - \frac{d\Psi \cdot (1 + e \cos. \Psi)^2}{(1 - e^2)(1 + 2e \cos. \Psi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

nec non

$$\frac{z dz}{\sqrt{(1 - n z z)}} = \frac{e}{m} \cdot \frac{d\Phi \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$$

$$= - \frac{e d\Psi (1 + e \cos. \Psi)^2}{m (1 - e^2) (1 + 2e \cos. \Psi + e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

At est $1 - e^2 = \frac{n}{m + n}$, hinc $m (1 - e^2) = \frac{m n}{m + n}$, et casu m infiniti, fit $m (1 - e^2) = n$, ideoque

$$\frac{z dz}{\sqrt{(1 - n z z)}} = - \frac{d\Psi (1 + \cos. \Psi)^2}{n (2 (1 + \cos. \Psi))^{\frac{3}{2}}}$$

$= - \frac{d\Psi}{2} \cdot \cos. \frac{1}{2} \Psi$ ob $e = 1$, existente

$$z = \frac{e}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{e \sqrt{(1 - e^2)}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{e + \cos. \Psi}{e \sqrt{n} (1 + 2e \cos. \Psi + e^2)},$$

$$\text{feu } z = \frac{\sqrt{(1 + \cos. \Psi)}}{\sqrt{2n}} = \frac{\cos. \frac{1}{2} \Psi}{\sqrt{n}}.$$

Caeterum binae hae reductiones iam quoque directe ex §. 18. et 19. deduci possunt. Denique differentiale $\frac{z dz}{\sqrt{(n z z - 1)}}$ reducitur ad formulam nostram XI. §. 22, ponendo $e = 0$,
crit-

eritque $\frac{z dz}{\sqrt{(n z z - 1)}} = \frac{d\Phi}{n \cos. \Phi^2}$, posito $z = \frac{1}{\sqrt{n \cos. \Phi}}$, et substitutione facta, horum differentialium aequalitas mox innotescet.

§. 33. Dum supra §. 23. 24, ostendimus esse pro Hyperbolâ:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Phi)^2} + \int d\psi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \psi + e^2)}}{(1 + e \cos. \psi)^2} \\ = C + \frac{e}{e^2 - 1} \cdot \frac{(e + \cos. \Phi)(e + \cos. \psi)}{(1 + e \cos. \Phi)(1 + e \cos. \psi)},$$

posito

$$e \sqrt{(e^2 - 1)} \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} = \frac{1 + e \cos. \psi}{\sin. \psi},$$

et pro ellipsi:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{(1 + e \cos. \Phi)^2} + \int d\psi \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \psi + e^2)}}{(1 + e \cos. \psi)^2} \\ = C - \frac{e^2}{e^2 - 1} \cdot \frac{(e + \cos. \Phi)(e + \cos. \psi)}{(1 + e \cos. \Phi)(1 + e \cos. \psi)},$$

posito

$$\sqrt{(1 - e^2)} \frac{\sin. \Phi}{e + \cos. \Phi} = \frac{e + \cos. \psi}{\sin. \psi},$$

valorem constantis C nondum definiuimus, quare restat, vt id hic expediamus. Definietur autem ille valor commodissime ex suppositione $\Phi = \psi$, tum scilicet erit pro priori casu $e \sqrt{(e^2 - 1)} \sin. \Phi^2 = (1 + e \cos. \Phi)^2$, ideoque $e \sqrt{(e^2 - 1)} = 1 + 2e \cos. \Phi + e \cos. \Phi^2 (e + \sqrt{(e^2 - 1)})$, vnde deducitur:

$$\cos. \Phi + \frac{1}{e + \sqrt{(e^2 - 1)}} = \frac{\sqrt{((e \sqrt{(e^2 - 1)} - 1)(e^2 + e \sqrt{(e^2 - 1)} + e^2))}}{e(e + \sqrt{(e^2 - 1)})},$$

haec autem formula aliquanto fit concinnior, si loco e in computum introducatur $\sin. \lambda = \frac{1}{e}$, tum enim erit:

$$\cos. \Phi^2 (1 + \cos. \lambda) + 2 \sin. \lambda \cos. \Phi = \cos. \lambda - \sin. \lambda^2$$

et proinde

$$\cos. \Phi^2 + 2 \tan. \frac{1}{2} \lambda \cos. \Phi = \frac{\cos. \lambda - \sin. \lambda^2}{1 + \cos. \lambda}, \text{ ob } \frac{\sin. \lambda}{1 + \cos. \lambda} = \tan. \frac{1}{2} \lambda,$$

$$\text{hincque } \cos. \Phi^2 + 2 \tan. \frac{1}{2} \lambda \cos. \Phi = \frac{\cos. \lambda^2 + \cos. \lambda - 1}{1 + \cos. \lambda},$$

quamobrem obtinebimus

$$(\cos. \Phi + \text{tang. } \frac{1}{2} \lambda)^2 = \frac{(\cos. \lambda^2 + \cos. \lambda - 1)(1 + \cos. \lambda)}{(1 + \cos. \lambda)^2} \\ + \frac{\sin. \lambda^2}{(1 + \cos. \lambda)^2} = \frac{\cos. \lambda^2 + \cos. \lambda^2}{(1 + \cos. \lambda)^2} = \frac{\cos. \lambda^2}{1 + \cos. \lambda},$$

hincque fit:

$$\cos. \Phi + \text{tang. } \frac{1}{2} \lambda = \frac{\cos. \lambda \sqrt{2}}{2 \cos. \frac{1}{2} \lambda} \text{ et}$$

$$\cos. \Phi = \frac{1}{\cos. \frac{1}{2} \lambda} \left(\frac{\cos. \lambda}{\sqrt{2}} - \sin. \frac{1}{2} \lambda \right),$$

quae aequatio semper subsistere potest, siquidem quadratum denominatoris $\cos. \frac{1}{2} \lambda^2$ excedat quadratum numeratoris $\frac{1}{2} \cos. \lambda^2 - \sqrt{2} \sin. \frac{1}{2} \lambda \cos. \lambda + \sin. \frac{1}{2} \lambda^2$, est vero $\cos. \frac{1}{2} \lambda^2 - \sin. \frac{1}{2} \lambda^2 = \cos. \lambda$, unde esse debet

$$\cos. \lambda \geq \frac{1}{2} \cos. \lambda^2 - \sqrt{2} \sin. \frac{1}{2} \lambda \cos. \lambda, \text{ siue}$$

$$1 + \sqrt{2} \sin. \frac{1}{2} \lambda \geq \frac{1}{2} \cos. \lambda,$$

de quo nullum est dubium, quia $\sin. \lambda$ ideoque tanto magis $\sin. \frac{1}{2} \lambda$, semper poni potest positivus. Si igitur arcus Hyperbolae angulo iam quaesito Φ respondens indigitetur per π , fiet

$$2 \pi = C - \frac{e^2}{e^2 - 1} \cdot \frac{(e + \cos. \Phi)}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

ideoque

$$C = 2 \pi + \frac{e^2}{e^2 - 1} \cdot \frac{(e + \cos. \Phi)^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

vbi expressio algebraica ob

$$\cos. \Phi = \frac{\cos. \lambda}{\sqrt{1 + \cos. \lambda}} - \frac{\sin. \lambda}{1 + \cos. \lambda} = \frac{\cos. \lambda \sqrt{1 + \cos. \lambda} - \sin. \lambda}{(1 + \cos. \lambda)} \\ = \frac{\cos. \lambda - \sqrt{1 - \cos. \lambda}}{\sqrt{1 + \cos. \lambda}},$$

in sequentem abit

$$\frac{e^2}{e^2 - 1} \cdot (1 + \cos. \lambda) = \frac{1 + \cos. \lambda}{\cos. \lambda^2}.$$

Pro posteriori casu si statuatur $e = \sin. \lambda$, prorsus ad eandem perueniemus aequationem, vnde similis valor pro $\cos. \Phi$ deriuatur.

§. 34. Quia pro Ellipsi supposuimus

$$\frac{\sin. \Phi \sqrt{(1-e^2)}}{e + \cos. \Phi} = \frac{e + \cos. \Psi}{\sin. \Psi}, \quad \frac{1 + e \cos. \Psi}{e + \cos. \Psi} = \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{\sin. \Phi},$$

hinc diuidendo per e ,

$$\frac{1-e^2}{e + \cos. \Psi} = \frac{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)} - e \sin. \Phi}{\sin. \Phi} \quad \text{et}$$

$$e + \cos. \Psi = \frac{(1-e^2) \sin. \Phi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)} - e \sin. \Phi},$$

quare fiet

$$\cos. \Psi = \frac{\sin. \Phi - e \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)} - e \sin. \Phi},$$

tumque

$$\sin. \Psi = \frac{\sqrt{(1-e^2)} (e + \cos. \Phi)}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)} - e \sin. \Phi},$$

ex his vero formulis quum elegans aliqua constructio elici nequeat, negotium alio modo tentabimus. Sit igitur A C D B ellipsis cuius axis est A B et focus in F, tumque ductae concipiantur rectae F C, F D ea ratione, vt cum A F constituent angulos A F C = Φ et A F D = Ψ , ita comparatos, vt sit $\frac{\sin. \Phi \sqrt{(1-e^2)}}{e + \cos. \Phi} = \frac{e + \cos. \Psi}{\sin. \Psi}$, et rectae C E, D E normales ad Ellipsin in punctis C et D; eritque ex nota proprietate Sectionum Conicarum F C : F E = F D : F G in data ratione = 1 : e. In triangulo igitur F C E, habebimus C E = $v \sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}$, linea scilicet F C per v indigitata, quare si angulus C E F per θ exprimatur, erit $\sin. \theta = \frac{v \sin. \Phi}{\sqrt{(1 + 2e \cos. \Phi + e^2)}}$, hinc itaque ex valore pro $\cos. \Psi$ supra allato, colligitur

$$\cos. \Psi = \frac{\sin. \theta - e}{1 - e \sin. \theta}, \quad \text{indeque} \quad \frac{1 - \cos. \Psi}{1 + \cos. \Psi} = \frac{(1+e) (1 - \sin. \theta)}{(1-e) (1 + \sin. \theta)}.$$

N 2

Si

Tab. I.
Fig. 6.

Si nunc ex puncto F in C E ducatur perpendicularis FK et ponatur angulus E F K = $\eta = 90^\circ - \theta$, erit

$$\frac{1 - \cos \psi}{1 + \cos \psi} = \frac{1 + e}{1 - e} \cdot \frac{1 - \cos \eta}{1 + \cos \eta},$$

hincque si e statuatur = $\cos \gamma$,

$$\frac{1 - \cos \psi}{1 + \cos \psi} = \frac{1 + \cos \gamma}{1 - \cos \gamma} \cdot \frac{1 - \cos \eta}{1 + \cos \eta},$$

vnde deducitur $\text{Tang. } \frac{1}{2} \psi = \cot. \frac{1}{2} \gamma \text{Tang. } \frac{1}{2} \eta$. Simili ratione pro Hyperbola formula satis concinna, determinatio anguli ψ tradi potest, cui tamen explicandae non est vt heic immoremur.

§. 35. Leui adhibita attentione patet, esse

$$\text{Tang. } \theta = \frac{\sin \Phi}{e + \cos \Phi},$$

vnde si consimili modo angulus D G F per θ' exprimatur, erit:

$$\text{Tang. } \theta' = \frac{\sin \Psi}{e + \cos \Psi}, \text{ ideoque}$$

$$\text{Tang. } \theta \text{ Tang. } \theta' = \frac{\sin \Phi \sin \Psi}{(e + \cos \Phi)(e + \cos \Psi)} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{1}{\sin \gamma},$$

vnde elegans ista deducitur proprietas, productum tangentium ex angulis C E F, D G F esse constans. Caeterum de relatione angulorum Φ et Ψ sequentia notari merentur: 1°. Pro angulo Φ euanescente, erit $\cos \psi = -e$, ideoque $\psi = 180^\circ - \gamma$, vbi facile perspicitur angulum γ illum esse, quem recta a foco Ellipsis ad verticem axis minoris ducta, cum axe principali Ellipseos constituit. 2°. Aucto angulo Φ diminuetur angulus ψ , qui euanescet dum statuitur $\Phi = 180^\circ - \gamma$. 3°. Si angulus Φ adhuc augeatur vltra hunc limitem $\Phi = 180^\circ - \gamma$, fiet angulus ψ negatiuus. 4°. Si $\Phi = 180^\circ$, fiet $\psi = \gamma - 180^\circ$.

§. 36. Plurima quidem adhuc restarent obseruanda de reductione formularum differentialium ad rectificationes Sectionum Conicarum, verum quum ea heic singula exsequi non liceat, alia Dissertatione, quae hic nondum exposita sunt, luculentius pertractabimus.

DE
INFINITIES INFINITIS
GRADIBVS TAM INFINITE MAGNORVM
QVAM INFINITE PARVORVM.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Si x denotet quantitatem infinite magnam, tum ista progressio geometrica $1, x, xx, x^3, x^4, x^5$, etc. ita est comparata, vt quilibet terminus sit infinities maior praecedente, at vero infinities minor sequente. Vnde si potestatem x^{1000} tanquam vltimum terminum huius progressionis spectemus, inter terminum primum 1 et eum statui poterunt mille gradus diuersi infinite magnorum, vbi quidem ad eundem gradum referimus omnes quantitates finitam rationem inter se tenentes. Neque tamen iste numerus millenarius omnes gradus intermedios inter 1 et x^{1000} exhibet; vbi obseruandum, quae hic de numero determinato 1000 dicuntur, de quolibet alio numero, quantumuis magno, esse intelligenda.

§. 2. Plurimum abest, vti modo diximus, vt illa progressionem omnes gradus intermedii inter 1 et x^{1000} , qui quidem sint diuersi, repraesententur. Si enim ponamus $z = y^{1000}$ vt sit
 $y =$

$y = \sqrt[1000]{x}$, ob x quantitatem infinitam etiamnunc y erit quantitas infinita; vnde sequitur, quia inter 1 et y^{1000} denuo mille gradus intermedii assignari possunt, quorum quilibet pariter infinities maior est quam praecedens, infinities vero minor quam sequens, etiam inter unitatem et x denuo mille gradus intermedios constitui posse, etiam si ante x fuisset primus gradus infiniti. Simili vero modo etiam inter praecedentem gradum primum x et secundum xx iterum mille gradus intermedii constitui possunt, atque adeo inter binos quosvis gradus proximos, qui omnes ita sunt comparati, ut quilibet sit infinities maior quam praecedens, infinities vero minor quam sequens.

§. 3. Neque vero hic subsistere cogimur. Cum enim sit y quantitas infinite magna, si ponamus $y = z^{1000}$, etiamnunc z erit quantitas infinite magna; vnde intelligitur, inter 1 et z^{1000} , hoc est, inter 1 et y , denuo mille gradus intermedios infinitorum constitui posse, atque hoc modo ulterius progredi licet, quousque libuerit, ita ut numerus omnium graduum diuersorum reuera in infinitum augeri possit.

§. 4. Haec eadem quoque inuerso modo valent de infinite paruis. Si enim x denotet quantitatem infinite parvam huius progressionis geometricae: 1, x , xx , x^3 ... x^{1000} , quilibet terminus infinities minor est quam praecedens, at vero infinities maior quam sequens, hincque inter 1 et x^{1000} adipiscimur mille gradus intermedios infinite parvorum, omnes diuersos; quandoquidem quilibet infinities minor est praecedente, infinities vero maior sequente.

§. 5.

§. 5. Quod si iam ulterius ponamus $x = y^{1000}$, ut sit $y = \sqrt[1000]{x}$, etiamnunc y erit quantitas infinite parua; vnde patet inter 1 et y^{1000} , hoc est inter 1 et x , denuo mille gradus infinite paruorum intermedios constitui posse, quod etiam fieri poterit inter x et xx , similique modo inter xx et x^3 , atque in genere inter binos quosuis proximis praecedentis seriei; et quia, posito ulterius $y = z^{1000}$, etiamnunc z est quantitas infinite parua, numerus graduum dinersorum denuo millies euadet maior, quae multiplicatio ulterius sine fine continuari poterit.

§. 6. Haec quidem, quae ex consideratione potestatum sunt deducta, in vulgus sunt notissima, atque adeo ad Algebram communem referri possunt; verum Analysis sublimior praeterea suppeditat innumerabiles alios gradus tam infinite magnorum quam paruorum, quae nullo modo in vlllo eorum graduum, quos modo commemorauimus, quantumuis etiam multiplicentur, comprehendendi possunt, sed perpetuo vel infinities maiores, vel minores deprehenduntur quam vlllus graduum praecedentium, quod cum nusquam satis clare explicatum esse memini, operae pretium erit hic fusius perpendisse.

§. 7. Tales autem quantitates in Analysis sublimiori occurrentes ad duas classes referri possunt, quarum altera complectitur logarithmos, altera vero quantitates exponentiales. De logarithmis igitur primum agamus, ac denotante x numerum infinite magnum constat quoque eius logarithmum esse infinite magnum. Perinde autem hic est, quonam canone logarithmorum uti velimus, siue communibus, siue hyperbolicis, siue quouis alio genere.

§. 8.

§. 8. Quando autem x est numerus infinite magnus, per se satis clarum est, eius logarithmum, hoc est $\log x$, infinitum quidem, attamen infinities esse minorem ipso numero x , quam ob rem ad gradum quempiam inferiorem referri debet. Quoniam igitur gradus ipso x inferiores per $x^{\frac{1}{n}}$ repraesentari possunt, denotante scilicet n numerum quantumvis magnum, haud difficulter ostendi potest, semper esse $\log x$ infinities minorem quam $x^{\frac{1}{n}}$, quantumvis etiam magnus numerus pro n accipiat.

§. 9. Sequenti autem modo demonstrare licet, semper $x^{\frac{1}{n}}$ infinities maius esse quam $\log x$, siquidem $x = \infty$, siue valorem huius fractionis $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{\log x}$ semper esse infinite ma-

gnum. Statuatur enim iste valor $= v$, ut sit $v = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\log x}$, ac ponatur $p = \frac{1}{\log x}$ et $q = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}$, eritque $v = \frac{p}{q}$, cuius fractio-

nis tam numerator p quam denominator q fit $= 0$ casu $x = \infty$; quam ob rem secundum regulam notissimam erit quoque $v = \frac{d p}{d q}$. Cum igitur sit $d p = -\frac{d x}{x(\log x)^2}$ et

$d q = \frac{-d x}{n x^{\frac{1}{n}+1}}$, erit $v = \frac{n x^{\frac{1}{n}}}{(\log x)^2}$, quem ergo valorem

praecedenti $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{\log x}$ aequalem esse oportet. At vero sumtis

quadratis ex praecedente fit $v v = \frac{x^{\frac{2}{n}}}{(\log x)^2}$, qui valor per

posteriorem diuifus praebet $v = n x^{\frac{1}{n}}$, qui cum manifefto fit infinitus, etiam patet efle $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{l x}$ quantitatem infinite magnam, fiue femper efle $l x$ quantitatem infinites minorem quam $x^{\frac{1}{n}}$, quantumuis etiam magnus numerus pro n accipiat.

§. 10. Hinc igitur manifeflum eft, fi fuerit $x = \infty$, tum eius logarithmum $l x$ ad nullum gradum fuperiorum infinitorum referri pofle, quantumuis etiam illi gradus per continuam multiplicationem coarctentur. Quam ob rem hic constitui debet nouus plane gradus infiniti, claffificationi logarithmi $l x$ conueniens, ad quem fcilicet potestas $x^{\frac{1}{n}}$ continuo propius accedat, quo maior ftatuatur numerus n . Neque tamen idcirco cafus quo $n = \infty$ fatisfacit, quia ob $\frac{1}{n} = 0$ foret $x^{\frac{1}{n}} = 1$, cum tamen $l x$ fit infinitus; verum probe notandum eft, demonftrationem ante allatam praebuiſſe $n x^{\frac{1}{n}}$, vnde fumto etiam $n = \infty$ nihilominus prodit $v = n$, ideoque adhuc infinitum.

§. 11. Cum igitur $l x$ conftituat quaſi gradum infimum omnium quantitatum infinite magnarum, euidens eft, hinc numerum graduum fupra conftitutorum, qui iam erat infinitus, inſuper in infinitum augeri debere. Si enim contemblemur gradum quemcunque potestate x^{α} designatum, manifeflum eft, hanc formulam: $x^{\alpha} / l x$, infinites efle maiorem quam x^{α} ; ftatim vero atque exponens α fractione quam minima $\frac{1}{n}$ augetur, tum certe formula $x^{\alpha} / l x$ infinites

nities erit minor quam $x^{\alpha + \frac{1}{n}}$, ideoque necessario inter gradus x^{α} et $x^{\frac{1}{n}}$ constitui debet.

§. 12. Verum hoc modo neutiquam adhuc multitudo omnium graduum diuersorum exhauritur. Etsi enim $(lx)^2$ sit infinities maior, quam lx , ideoque peculiarem gradum constituere debeat: tamen adhuc infinities minor est quam potestas $x^{\frac{1}{n}}$, quantumuis etiam numerus n augeatur. Simili porro modo omnes diuersae potestates ipsius lx peculiare prorsus praebent casus infinitorum, id quod adeo ad exponentes fractos est extendendum, cum $(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ certe infinities maior sit quam $(lx)^{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{n}}$, attamen infinities minor quam $(lx)^{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{n}}$, ideoque peculiarem gradum constituere debeat. Totidem vero etiam novi Casus exsurgent, si insuper per potestatem quamcunque ipsius x multiplicemus: scilicet formula $x^{\alpha} (lx)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ infinities maior quam $x^{\alpha} (lx)^{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{n}}$, interim tamen infinities minor est quam $x^{\alpha} (lx)^{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{n}}$.

§. 13. Neque vero adhuc hoc modo omnes gradus infinitorum enumerari possunt. Quia enim lx est quantitas infinite magna, etiamnunc eius logarithmus llx erit infinitus, etiamsi infinities minor quam lx ; unde patet, ex hac formula: llx , eiusque potestatibus $(llx)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ insuper infinitos novos gradus infinitorum statui debere, imprimis si haec formula non solum cum potestatibus

statibus ipsius $l x$ sed etiam cum potestatibus ipsius x combinetur; haecque consideratio adeo ulterius ad formulas $lll x$, $llll x$, etc. extendi poterit.

§. 14. Immenſa haec graduum multitudo etiam locum habet in infinite paruis, quippe quae ſpectari poſſunt vt reciproca infinite magnorum, quoniam quodlibet infinitum ∞ , ſi vnitas per id diuidatur, ſcilicet $\frac{1}{\infty}$, peculiarem gradum infinite parui conſtituere cenſeri debet. Ita ſi x ſit quantitas infinita, non ſolum haec ſeries: $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{xx}$; $\frac{1}{x^3}$; $\frac{1}{x^4}$; etc. infinitos gradus infinite paruorum ſuppeditat, ſed etiam haec ſeries: $\frac{1}{lx}$; $\frac{1}{(lx)^2}$; $\frac{1}{(lx)^3}$; $\frac{1}{(lx)^4}$; etc. vna cum omnibus potestatibus ſingulorum terminorum novos gradus infinite paruorum praebet; tum vero etiam ſeries $\frac{1}{llx}$; $\frac{1}{(llx)^2}$; $\frac{1}{(llx)^3}$; etc. atque adeo omnes ſequentes, vbi ſignum logarithmi ulterius multiplicatur, hanc multitudinem in immenſum adaugent.

§. 15. Quae haecenus de logarithmis ſunt tradita ſimili modo extendi poſſunt ad quantitates exponentiales, vnde pariter innumerabiles noui gradus tam infinite magnorum quam infinite paruorum conſtitui poſſunt, qui a praecedentibus prorsus erunt diuerſi. Si enim vt haecenus x denotet numerum infinitum, notum eſt valorem potestatis a^x etiam eſſe infinite magnum, quoties ſcilicet numerus a vnitatem ſuperauerit; ſin autem fuerit $a < 1$, eandem potestatem a^x exhibere quantitatem infinite paruam. Conſideremus autem primo infinite magna, ſumendo $a > 1$,
atque

atque manifestum est potestatem a^x infinities non solum superare ipsum exponentem, verum adeo demonstrari potest, semper fore a^x quantitatem infinities maiorem quam potestatem x^n , quantumvis magnus etiam fuerit exponens n . Demonstratio autem sequenti modo se habet.

§. 16. Ponatur $\frac{a^x}{x^n} = v$, sitque $p = \frac{1}{x^n}$ et $q = \frac{1}{a^x}$, ut fiat $v = \frac{p}{q}$, cuius fractionis tam numerator p quam denominator q casu $x = \infty$ euanescit, sicque erit etiam $v = \frac{dp}{dq}$. Est vero $dp = -\frac{n dx}{x^{n+1}}$ et $dq = -\frac{dx la}{a^x}$, unde fit $v = \frac{n a^x}{x^{n+1} la}$, quae quidem formula multo magis est complicata quam ipsa proposita $v = \frac{a^x}{x^n}$, ita ut hinc nihil concludi posse videatur. Interim tamen ex harum formularum comparatione verus valor ipsius v concludi poterit. Cum enim ex priora sit $v^{n+1} = \frac{a^{x(n+1)}}{x^{n(n+1)}}$, ex posteriore vero $v^n = \frac{n^n a^{nx}}{x^{n(n+1)} (la)^n}$, prior valor per posteriorem diuisus dabit $v = \frac{a^x (la)^n}{n^n}$, qui valor manifesto est infinitus. Sicque demonstratum est, formulam a^x semper esse infinities maiorem quam x^n , quatumvis etiam magnus capiatur exponens n , dummodo fuerit $a > 1$. Hinc igitur

tur patet, quantitatem exponentialem a^x omnes gradus infinitorum ex potestate x^n oriundorum infinities superare. Hinc, quamquam x est quantitas infinita, tamen omnes istae fractiones: $\frac{a^x}{x}$; $\frac{a^x}{xx}$; $\frac{a^x}{x^3}$; et in genere $\frac{a^x}{x^n}$ ad tantum gradum infiniti exsurgunt, ut omnes gradus infinitorum primae classis excedant. Manifestum autem est haec eadem valere de formulis a^{ax} , dummodo fuerit $a > 0$; atque adeo etiam valet de formulis a^{ax^β} , si modo literis a et β valores positiui tribuantur; quae ergo infinita infinities sunt altiora quam potestates ipsius x , quantumvis fuerint magnae.

§. 17. Praeterea etiam notandum est, etiamsi formula a^x ad gradum infiniti infinite alti pertineat: tamen, simul ac valor litterae a quam minime augeatur, valorem huius formulae adhuc infinities euadere altiore. Si enim fuerit $b > a$, tum formula a^x se habebit ad formulam b^x , ut 1 ad $(\frac{b}{a})^x$, hoc est, ut 1 ad infinitum infinitissimi gradus.

§. 18. Quando autem $a > 1$, tum omnes huiusmodi potestates a^x reuocari possunt ad potestates numeri fixi e , cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, cum sit $a^x = e^{x \log a}$, ficque omnia huius generis infinita repraesentari poterunt sub hac forma e^{ax^β} , existente $a > 0$ et $\beta > 0$; tum vero etiamnunc ista formula $\frac{e^{ax^\beta}}{x^n}$ ad gradum infinities-

nitesimum infinitorum referri debebit. Multo magis etiam hi gradus infinitesimi in infinitum eleuari poterunt, si loco αx^α scribamus $e^{\alpha x^\beta}$, quo pacto peruenietur ad hanc formam: $e^{\alpha x^\beta}$; haecque augmentatio ulterius sine fine continuari poterit.

§. 19. Omnia haec inuerso modo ad infinite parua transferri possunt, quae iam aliquanto accuratius perpendamus. Denotet igitur litera x quantitatem infinite parua, cuius ergo potestates singulae x^α innumeros gradus infinite paruorum suppeditant, quoniam aucto vel minimum exponente α formula euadit infinities minor. Hos autem gradus omnes sub prima classe infinite paruorum complectamur, si modo exponenti α omnes valores positiui tribui intelligantur.

§. 20. Ad secundam vero classem referamus ea infinite parua, quae ex logarithmis nascuntur. Quoniam enim $l \frac{1}{x}$ est infinitus, eius reciprocum $\frac{1}{l \frac{1}{x}}$ erit infinite paruum. Ponamus autem commoditatis gratia $l \frac{1}{x} = u$, ut ista forma fiat $\frac{1}{u}$, quae erit tale infinite paruum, quod omnia infinite parua primae classis infinities superat. Ad hanc classem quoque pertinebunt formulae $\frac{1}{uu}$; $\frac{1}{u^2}$; $\frac{1}{u^3}$, etc. et in genere $\frac{1}{u^\alpha}$. Tum vero etiam huc referendae erunt

formae

formae $\frac{x^x}{u^u}$, quae quasi mixtae sunt ex prima et secunda classe. Praeterea vero, quia adhuc est $l u$ infinite magnum, sed infinities minor quam u , eius reciprocum $\frac{1}{l u}$ erit infinite paruum, sed infinities maius quam $\frac{1}{u}$. Simili modo hae formulae: $\frac{1}{l.l.u}$ et $\frac{1}{l.l.l.u}$ erunt infinite parua continuo infinities maiora praecedentibus; vnde ergo per compositionem cum superioribus innumerabiles noui gradus infinite paruorum constitui poterunt, quos enumerare nequaquam licet.

§. 21. In hoc genere autem imprimis notari debet, quod, etiamsi $u = l \frac{1}{x}$ sit infinite magnum, tamen producta $x^n u$ omnia esse infinite parua, si modo fuerit $n > 0$. Etsi hoc ex praecedentibus sequatur, tamen ita succincte demonstrari potest. Ponatur $x^n u = v$, sitque $x^n = p$ et $\frac{1}{u} = q$, vt fiat $v = \frac{p}{q}$, cuius fractionis tam numerator quam denominator euanescit casu $x = 0$, vnde quoque erit $v = \frac{d p}{d q}$. Est vero $d p = n x^{n-1} d x$, et quia $u = l \frac{1}{x}$, siue $u = -l x$, erit $d u = -\frac{d x}{x}$, ideoque $d q = \frac{d x}{x u u}$, vnde fit $v = n x^n u u$. Quare cum ex priore valore sit $v v = x^{2n} u u$, hic per modo inuentum diuisus dat $v = \frac{x^n}{n}$; vnde patet valorem ipsius v esse infinite paruum, id quod etiam valebit de formula $x^n u^a$, hocque non solum quando a est numerus positius, sed etiam quando

do est negatius, cum formula $\frac{x^n}{u^m}$ per se sit infinite parua.

§. 22. Praeter has autem duas classes infinite paruorum quantitates exponentiales tertiam nobis praebebunt classem.

Cum enim ob $x = 0$ formula $e^{\frac{1}{x}}$ praebeat infinite magnum quasi supremi ordinis, eius reciprocum $\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = e^{-\frac{1}{x}}$ dabit in-

finite paruum etiam supremi ordinis, quod scilicet infinites erit minus quam vllum infinite paruum primae classis, id quod etiam tenendum est de formula generali

$\frac{1}{e^{\frac{\alpha}{x^\beta}}}$. Ponamus autem breuitatis gratia $e^{\frac{\alpha}{x^\beta}} = v$, vt haec

infinite parua comprehendi queant in hac forma $\frac{1}{v}$. Cum

igitur hinc sit $lv = \frac{\alpha}{x^\beta}$, erit differentiando,

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\alpha \beta dx}{x^{\beta+1}}, \text{ ideoque } dv = -\frac{\alpha \beta v dx}{x^{\beta+1}}.$$

Praeterea vero hic imprimis notandum est, etiamsi x sit quantitas euanesceus, tamen has formulas $\frac{1}{x^n v}$ etiamnunc exprimere infinite parua supremi ordinis.

§. 23. His iam classibus constitutis insignia subsidia tam pro differentiatione quam integratione talium infinite paruorum reperiri possunt, quemadmodum enim, si pro prima classe ponatur $ax^\alpha = y$ fit $\frac{dy}{dx} = \alpha ax^{\alpha-1}$ et

$\int y \, dx = \frac{a}{\alpha + 1} x^{\alpha+1}$, patet, hoc integrale infinites minus esse quam y , dum contra differentiale $\frac{dy}{dx}$ infinites est maius, atque adeo fieri queat infinite magnum, si $\alpha < 1$, id quod etiam de infinite parvis reliquarum classium est intelligendum.

§. 24. Consideremus nunc infinite paruum secundae classis, ac posito $l \frac{1}{x} = u$, ut sit $du = -\frac{dx}{x}$, statuamus $y = a x^{\alpha} u^m$, ubi sit $\alpha > 0$, m vero numerus siue positivus, siue negativus, siquidem utroque casu haec formula est infinite parva. Hinc igitur fiet

$$\frac{dy}{dx} = \alpha a x^{\alpha-1} u^m - a m x^{\alpha-1} u^{m-1} = a x^{\alpha-1} u^{m-1} (\alpha u - m),$$

quia autem u est infinitum, reiecto termino posteriore

$$-m \text{ erit } \frac{dy}{dx} = \alpha a x^{\alpha-1} u^m, \text{ vnde per } dx \text{ multiplicando et}$$

integrando fit $\int \alpha a x^{\alpha-1} u^m \, dx = y = a x^{\alpha} u^m$, vnde hanc nanciscimur integrationem satis memorabilem:

$$\int x^{\alpha-1} u^m \, dx = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} u^m, \text{ siue loco } \alpha - 1 \text{ scribendo } \beta \text{ erit}$$

$$\int x^{\beta} u^m \, dx = \frac{1}{\beta + 1} x^{\beta+1} u^m.$$

§. 25. Hinc ergo si concipiamus lineam curvam, cuius abscissae x respondeat applicata $y = a x^{\beta} u^m$, ubi sit $\beta > 1$, et exponens m siue positivus siue negativus, huius curvae applicata in ipso initio, ubi $x = 0$, evanescet, area vero huius curvae abscissae x infinite parvae respondens
erit

erit $\int y dx = \frac{a}{\epsilon + 1} x^{\epsilon + 1} u^m = \frac{1}{\epsilon + 1} xy$: aequabitur scilicet rectangulo ex abscissa x in applicatam y , diuiso per $\epsilon + 1$, quod eo magis est memorabile, quia formula $x^\epsilon u^m dx$ nullo modo integrari potest, praeter casus paucissimos, quibus exponens m est numerus integer posituius.

§. 26. Consideremus nunc quoque infinite parua tertiae classis, ac ponamus breuitatis gratia vt supra

$$\frac{a}{x^\beta} = v, \text{ vt sit } dv = - \frac{a \epsilon v dx}{x^{\epsilon + 1}},$$

eritque, vt vidimus, haec formula $\frac{x^m}{v}$ semper quantitas infinite parua, siue exponens m fuerit posituius, siue negatiuus. Quodsi ergo ponatur $\frac{x^m}{v} = z$, erit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m x^{m-1} + a \epsilon x^{m-\epsilon-1}}{v} = \frac{x^{m-\beta-1}}{v} (m x^\epsilon + a \beta)$$

vbi quia $m x^\epsilon$ euanescit prae $a \beta$ erit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a \epsilon x^{m-\epsilon-1}}{v}$$

vnde vicissim integrando erit

$$z = a \epsilon \int \frac{x^{m-\beta-1} dx}{v} = \frac{x^m}{v},$$

ideoque si loco $m - \epsilon - 1$ scribamus n , ita vt n sit numerus quicunque siue posituius siue negatiuus, semper erit

$$\int \frac{x^n dx}{v} = \frac{1}{a \epsilon} \frac{x^{n+\epsilon+1}}{v},$$

quae integratio vera est, quamdiu x est infinite paruum,

cum tamen formula differentialis omnem integrationem respuat.

§. 27. Quodsi ergo linea curua concipiatur, cuius abscissae x respondeat applicata $y = \frac{a x^n}{v}$, existente $v = e^{\frac{\alpha}{x} \beta}$, vbi α et β sint numeri positiui, exponens vero n quicumque sue positiuus sine negatiuus, applicata huius curuae in ipso initio vbi $x = 0$ etiam euanescet, huius vero curuae area abscissae x infinite paruae respondens erit

$$\int y dx = \frac{a}{\alpha \beta} \frac{x^{\alpha + \beta + 1}}{v} = \frac{1}{\alpha \beta} x^{\alpha + 1} y, \text{ hinc ergo si}$$

fuerit $y = \frac{a x^n}{e^{\frac{\alpha}{x} \beta}}$, vbi $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ erit $\int y dx = x x y$.

Hoc est area curuae aequabitur rectangulo ex quadrato abscissae in applicatam.

§. 28. Quodsi iam vicissim quaeramus curuam cuius area in genere debeat esse $\int y dx = x x y$, peruenitur ad hanc aequationem differentialem: $y dx = 2 x y dx + x x dy$ vnde fit

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx (1 - 2x)}{x x}$$

denique integrando

$$l y = -\frac{1}{x} - 2 l x, \text{ atque ad numeros surgendo}$$

$$y = \frac{a}{x x e^{\frac{1}{x}}}, \text{ quae in forma proposita continetur,}$$

si ca-

si capiatur $n = -2$, at vero superior integratio locum habet quando x infinite paruum.

§. 29. Postrema autem integratio etiam valet, si quantitas infinite parua insuper classem secundam utcumque innoluat. Posito enim $l \frac{1}{x} = u$, si statuamus $z = \frac{a x^m u^m}{v}$

(vbi exponentes m et n tam negatiue quam positiue accipi possunt, quandoquidem haec quantitas semper est infi-

nite parua, dummodo fuerit $v = e^{\frac{\alpha}{x^\beta}}$) atque vt valorem $\frac{dz}{dx}$ facilius eruamus, sumamus logarithmos, erit

$$l z = l a + m l x + n l u - l v \text{ ideoque}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{m dx}{x} + \frac{n du}{u} - \frac{dv}{v}. \text{ Quia vero est}$$

$$du = -\frac{dx}{x} \text{ et } dv = -\frac{\alpha \beta dx}{x^{\beta+1}} v \text{ binis his valori-}$$

bus in superiore expressione substitutis ea sequentem induet formam:

$$\frac{dz}{z u x} = \frac{m}{x} - \frac{n}{u x} + \frac{\alpha \beta}{x^{\beta+1}},$$

vbi cum sit $\beta + 1 > 1$, ambo termini priores prae tertio euanescent, sicque erit concinnius

$$\frac{dz}{z dx} = \frac{\alpha \beta}{x^{\beta+1}}, \text{ ideoque } dz = \frac{a \alpha \beta x^{-\beta-1} u^m}{v} dx.$$

§. 30. Quodsi iam hic loco $n - \beta - 1$ scribamus k , ita vt k aeque ac m denotent numeros quoscumque tam

positiuos quam negatiuos, ob $n = k + \beta + 1$ semper erit

$$\frac{\int x^k u^m dx}{v} = \frac{1}{\alpha \beta} \cdot \frac{x^{k+\beta+1} u^m}{v}$$

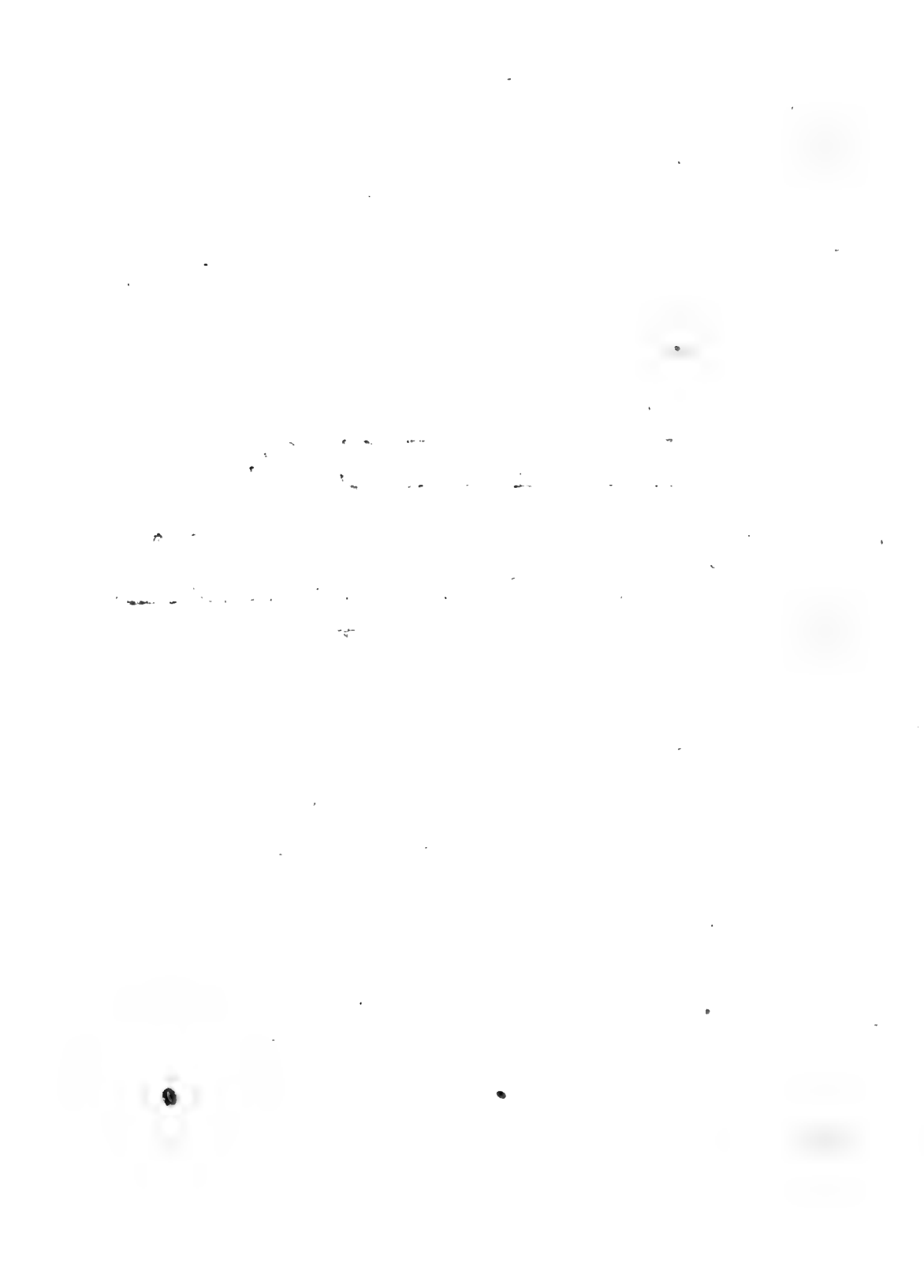
ideoque si fuerit $\frac{x^k u^m}{v} = y$, et y spectetur vt applicata

curuae, eius area erit

$$\int y dx = \frac{1}{\alpha \beta} \cdot y x^{\beta+1},$$

quamdiu scilicet fuerit x infinite paruum, quod eo magis est notatu dignum, quia nulla adhuc via inuenta est huiusmodi integrationes instituendi.

PHYSIC O.
MATHEMATICA.





DETERMINATIO ONERVVM, QVAE COLUMNAE GESTARE VALENT.

Auctore

L. EVLERO.

§. I.

In Tomo XIII. Actorum Academiae Berolinensis exhibui commentationem de vi columnarum; vbi ex principio prorsus singulari, quod ab hoc argumento penitus alienum videatur, determinavi quantitatem oneris, quod data quaevis columna sustinere valeat, quin rumpatur. Ista determinatio mihi ob hanc causam non solum prorsus noua, sed etiam maxime memorabilis est visa, quandoquidem in gestatione onerum vera natura columnarum constitui debet, idque eo magis, quod vulgo ab Auctoribus, qui doctrinam de columnis tractauerunt, hoc argumentum penitus negligi solet, dum potissimum in describendis ordinibus et ornamentis columnarum sunt occupati. Quin etiam Scriptores physici, qui tenacitatem et cohaesionem corporum solidorum sunt perscrutati, experimenta quidem instituerunt circa vires, quas exiguae columnae sustinere valeant, neque vero in legem et proportionem inquisuerunt, quam quantitas
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I. Q oneris

oneris sustinendi, tam ratione crassitiei, quam altitudinis sequatur.

§. 2. Non parum igitur sum miratus, cum nuper celeberrimam Encyclopediam Gallicam euoluerem, quod sub titulo columnarum disertis verbis ipsa mea proportio, quasi in vulgus cognita, in medium profertur, secundum quam onera, quae columnae cylindricae eiusdem diametri gestare valent, rationem reciprocam duplicatam altitudinum tenere perhibentur; ita ut columna duplo altior quartam tantum partem oneris sustinere queat; neque vero ullus auctor allegatur, qui hanc proportionem siue ex experimentis conluserit, siue per theoriam confirmauerit.

Tab. II.
Fig. I.

§. 3. Quando autem quaeritur, quantum onus O data quaevis columna A B C D pro ratione altitudinis et crassitiei gestare valeat, quaestio sine dubio maxime est ardua; neque enim video, quomodo ea ex cognitis principiis, circa soliditatem corporum stabilitis, resolui possit. Quoniam enim onus O perpendiculariter deorsum premit, nulla prorsus vis adesse videtur, quae columnam rumpere tendat, quantumvis etiam magnum fuerit onus; propterea quod nulla ratio deprehenditur, cur columna potius versus vnam regionem, quam quamvis aliam inflectatur et frangatur. Interim tamen experientia satis declarat, tale onus non ultra certos limites augeri posse, atque adeo in natura nunquam causae desunt, quae rupturam in vnam plagam potius, quam omnes alias producant. Neque tamen a quoquam Auctore eiusmodi principia stabilita esse reperiō, unde solutionem huius quaestionis petere liceat.

§. 4. Quin etiam ipse praeter omnem expectationem ad enodationem huius quaestionis sum perductus, cum olim incurvationem laminarum elasticarum, quae ipsis a viribus quibuscunque inducatur, inuestigarem. Cum enim laminam elasticam $A C B$ essem contemplatus, quae tensione chordae $A B$ in statum incuruatum $A C B$ fuerit reducta, et pro quouis gradu incurvationis quantitatem tensionis chordae essem perscrutatus, non sine admiratione inveni, incurvationem adeo infinite parvam iam tensionem finitam postulare, ita vt, quamdiu chorda $A B$, vtrique termino laminae elasticae alligata, vi quacunque minore intendatur, laminam nullam plane inflexionem, ne infinite quidem parvam, esse passuram, cum tamen eidem laminae $A C B$, parieti in B infixae, etiam a minima vi $A \alpha$ quaedam incuruatio inducatur.

Tab. II.
Fig. 2.

Fig. 3.

§. 5. Quanquam autem columna maxime discrepat a lamina elastica, tamen in hoc egregie conueniunt, quod columna a pondere incumbente rumpi nequeat, nisi ipsi ante vel minima quaedam inflexio inducatur. Quoniam igitur pondus incumbens simili modo in columnam agit, quo lamina elastica $A C B$ (Fig. 2.) a chorda $A B$ sollicitatur, euidens est, etiam columnae ne minimam quidem inflexionem induci posse, nisi pondus incumbens certum quendam limitem superauerit. Consideremus enim columnam $A B C D$, cui ab incumbente pondere iam inflexio infinite parua sit inducta, qua eius axis curvaturam infinite parvam $O V P$ acceperit, ita vt recta $O P$ sit verticalis, et quoniam onus incumbens secundum hanc ipsam directionem $O P$ vrget, eandem vim manifesto exerit, ac si chorda recta $O P$ pari vi se contrahere anniteretur; ex

Fig. 4

quo similitudo cum lamina elastica supra considerata manifesto elucet, simulque intelligitur, columnam talem inflexionem, etiam si infinite parvam, recipere non posse, nisi onus incumbens certum quendam limitem superauerit, atque hic ipse limes nobis maximum onus indicat, quod columna sustinere valebit.

§. 6. Quemadmodum autem quaevis incuruatio, quae laminae elasticae induci debet, certam requirit vim, ita etiam facile intelligitur, certam quandam vim requiri, quae columnae nostrae incuruationem inducere valeat, quandoquidem ea tam ob soliditatem quam cohaesionem partium omni incuruationi resistit, quae resistentia sine dubio eo maior est censenda, quo crassior fuerit ipsa columna et quo maior simul fuerit incuruatio. Ad talem effectum explicandum in calculum introduci solet formula quaequam rigorem absolutum corporis inflectendi exprimens, quae per radium curvaturae diuisa praecise aequalis euadat momento virium ad hanc ipsam incuruationem producendam requisito; unde cum momenta virium sint producta ex vi agente seu quodam pondere per quampiam lineam rectam multiplicato, euidens est formulam, qua rigor absolutus exprimitur, esse debere productum ex quoquam pondere et quadrato cuiuspiam lineae rectae, ita ut si per radium osculi diuidatur, prodeat formula similis ei, qua momenta virium exprimuntur.

§. 7: Quo nostram inuestigationem a casu simplicissimo exordiamur, contemplemur primo eiusmodi columnam, quae per totam suam altitudinem eandem habeat crassitiem, ita ut rigor absolutus, quo omni incuruationi resi-

resistit, habeat vbique eandem quantitatem, quam ergo exprimamus formula $E k k$, vbi E certum designet pondus, k autem certam lineam rectam. Hic quidem in genere statim patet, quo crassior fuerit columna, et quo maiore soliditate praedita, eo maiorem fore valorem formulae $E k k$. Infra autem ostendemus, si huiusmodi columnae fuerint cylindricae, ex materia eiusdem soliditatis formatae, tum formulam $E k k$ proportionalem fore biquadrato diametri crassitiei.

§. 8. Dum autem columnae cylindricae certae crassitiei tribuimus rigorem $= E k k$, valorem huius formulae haud difficulter per experimenta assignare licebit. Concipiamus enim, talem columnam, cuius axem tantum hic in figura repraesentamus, in B pavimento firmo ita firmiter esse infixam, vt inde dimoueri prorsus nequeat, cuius ergo rigor vbique sit $= E k k$, longitudo autem eius vocetur $AB = a$. Iam huic columnae in summitate A applicetur vis horizontalis AV , quae aequiualeat pondere $= F$, a qua igitur ipsa columna incuruabitur in situm Bya , hancque curuaturam tanquam minimam spectemus, scilicet vis illa horizontalis F maior capi non debet, quam vt punctum supremum A per spatium $Aa = \alpha$ detorqueat. Quibus positis ostendam, quomodo formula nostra rigorem exprimens, scilicet $E k k$, ex vi sollicitante F et altitudine $AB = a$ cum spatiolo $Aa = \alpha$ determinari possit.

Tab. II.
Fig. 5.

§. 9. Hunc in finem ante omnia in naturam curvae Bya inquiri oportet. Ducta igitur ex quouis curvae puncto y ad verticalem AB , normali yx , vocetur abscissa $Bx = x$ et applicata $xy = y$, quae ergo per hypothesin

Q 3

est

est quam minima, ita ut longitudo curvae By , quae sit $= s$, ab ipsa abscissa $Bx = x$ non discrepet. Quare si radius osculi huius curvae in y fuerit yr , eius longitudo, uti constat, est $= \frac{ds^3}{dx dy}$, ideoque ob $ds = dx$ iste radius osculi erit $= \frac{dx^2}{dy}$, ex quo rigor per hunc radium osculi diuisus erit $\frac{Ekk dy}{dx^2}$, quae formula aequalis statui debet momento vis sollicitantis F hanc curvaturam producentis, quod momentum cum sit $F \cdot Ax = F(a - x)$, habebitur pro nostra curva haec aequatio: $\frac{Ekk dy}{dx^2} = F(a - x)$, ex qua ante omnia naturam curvae definire oportet.

§. 10. Multiplicemus hanc aequationem per dx atque integratio nobis dabit:

$$\frac{Ekk dy}{dx} = \frac{1}{2} F (2ax - xx) + C$$

quae constans C ita debet esse comparata, ut posito $x = 0$, hoc est in ipso puncto B , non solum fiat $y = 0$, sed etiam $\frac{dy}{dx} = 0$, propterea quod recta AB in B firmiter est infixa, unde patet sumi debere $C = 0$, ita ut hanc habeamus aequationem: $Ekk dy = \frac{1}{2} F dx (2ax - xx)$, quae denuo integrata praebet $Ekk y = \frac{1}{6} F (3axx - x^3)$, unde posito $x = 0$ iam fit $y = 0$. Transferamus nunc punctum y in ipsam extremitatem a , sumendo $x = a$, et quoniam nouimus, tum fieri applicatam $= Aa = a$, aequatio nostra dabit $Ekk a = \frac{1}{6} F a^3$, ex quo manifesto prodit formula rigorem exprimens $Ekk = \frac{F a^3}{6}$, sicque per vnicum experimentum pro quavis columna cylindrica eius rigor absolutus seu valor formulae Ekk expedite determinari poterit, cum ex elementis cognitis, scilicet F , a et a statui possit $E = F$ et $kk = \frac{a^3}{6}$.

§. 11. Postquam igitur exploratus fuerit valor formulæ $E k k$ pro quapiam proposita columna cylindrica, ponamus istam columnam, cuius axem tantum $A B$ in figura exhibemus, a pondere incumbente O infinite parum esse inflexum, ita ut curuam $A y B$ induerit, ambaeque extremitates A et B immotae manserint; quoniam enim incuruatio supponitur infinite parua, ipsa curua $A y B$ ab axe $A B$ prorsus non discrepabit. His igitur positis vocemus altitudinem huius columnae $A B = a$, et pro puncto eius quocunque y ponamus abscissam $A x = x$ et applicatam $x y = y$, ita ut y evanescere debeat tam pro $x = 0$ quam pro $x = a$: modo ante autem vidimus radium osculi in hoc puncto y esse $= \frac{d x^2}{d y}$, qui cum hic axem versus vergat, poni debet $y r = - \frac{d x^2}{d y}$, ita ut momentum inflexioni resistens sit $-\frac{E k k d d y}{d x^2}$.

Tab. II.
Fig. 6.

§. 12. Quoniam nunc onus columnae incumbens O secundum directionem verticalem $A B$ deorsum vergit, eius momentum respectu puncti y erit $= O y$, vnde statim deducitur haec aequatio: $-\frac{E k k d d y}{d x^2} = O y$, pro qua breuitatis gratia scribamus $\frac{E k k}{O} = c c$, ut habeamus hanc aequationem: $\frac{c c d d y}{d x^2} + y = 0$, quae ducta in $2 d y$ et integrata dat $\frac{c c d y^2}{d x^2} + y y = f f$, vnde elicimus

$$d x^2 = \frac{c c d y^2}{f f - y y}, \text{ ideoque } d x = \frac{c d y}{\sqrt{f f - y y}}.$$

Hinc denuo integrando peruenimus ad hanc aequationem: $x = c \text{ Arc. sin. } \frac{y}{f} + C$, ita ut duae constantes f et c in calculum sint ingressae, quas ita definiri oportet, ut y evanescat tam casu $x = 0$ quam casu $x = a$; prior autem conditio statim nobis dat $C = 0$, ita ut habeamus

$$x = c$$

$x = c \text{ Arc. fin. } \frac{y}{f}$. Fiat nunc $x = a$, et quia fieri debet $y = 0$, habebimus $a = c \text{ Ar. fin. } 0$. Tales autem arcus sunt $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ etc. quorum primus iam pro termino A valuit; hic igitur valebit valor π . ita ut sit $a = \pi c$. Posueramus vero $c = \frac{Ekk}{O}$, quamobrem habebimus $a = \pi \sqrt{\frac{Ekk}{O}}$.

§. 13. Hic notatu dignum est, alteram constantem f prorsus ex calculo esse egressam. Quoniam igitur inuenimus $x = c \text{ A. fin. } \frac{y}{f}$, erit inuertendo $y = f \text{ fin. } \frac{x}{c}$; unde patet, quo maior fuerit quantitas f , eo magis incuruationem augeri; ideoque aequationem nostram finalem $a = \pi \sqrt{\frac{Ekk}{O}}$ perinde subsistere, siue columnae curvatura inducta fuerit tantillo maior siue minor, dummodo fuerit quam minima. Nunc vero ex ipsa hac aequatione innotescet pondus O , quod talem incuruationem producere valeat: reperietur enim $O = \frac{\pi \pi Ekk}{a a}$; unde intelligitur, quamdiu onus, columnae incumbens, non maius fuerit quam $\frac{\pi \pi Ekk}{a a}$, columnam omnino firmam consistere, neque vllum esse periculum, ut oneri succumbat. Hinc igitur statim patet, quod iam dudum inueneram, onera, quae columnae cylindricae eiusdem crassitie sustinere valent, tenere rationem reciprocam duplicatam altitudinum a , ita ut columna duplo altior tantum quartam partem oneris gestare valeat.

§. 14. Vt nunc etiam columnas diuersae crassitie inter se comparare queamus, inuestigari oportet, quomodo quouis casu formula rigorem exprimens Ekk a crassitie pendeat, id quod ex principiis physicis et experimentis super cohaesione et firmitate corporum institutis deriuari debet; ubi imprimis ad ipsam materiam, ex qua columnae paran-

parantur, erit respiciendum; et quoniam corpora incuruari nequeunt, nisi quaedam elementa a se inuicem longius remoueantur, eiusmodi experimenta consulere debebimus, quibus talis diductio vel elongatio a viribus quibuscunque produci potest. Hanc igitur inuestigationem sequenti modo adgrediamur.

§. 15. Ex eadem materia, qua columnae constant, Tab. II.
paretur bacillus cylindricus, vel prismaticus $EEFF$, qui Fig. 7.
altero termino EE pavimento MN ita firmiter infigatur, ut aliter inde diuelli nequeat, nisi dirumpatur, in altero vero termino pondus P appendi concipiatur, quod eo usque augeri potest, ut iste bacillus dirumpatur. Antè autem quam ipsa ruptura euenit, bacillus aliquantillum elongabitur per spatium Ff , quod eo minus erit, quo firmitior et solidior fuerit massa bacilli. Concipiamus ergo tale experimentum institui cum bacillo, cuius longitudo $EF = f$ et crassities $= gg$, tum vero istum bacillum ab appenso pondere P elongari per spatium $Ff = \Phi$; ac primo quidem patet, istam elongationem Φ ipsi longitudini bacilli f esse proportionalem: si enim bacillus duplo esset longior, ab eodem pondere P duplo maior elongatio Φ produceretur; vnde si statuamus $\Phi = \delta f$, dabitur certa relatio inter pondus P et litteram δ , ita ut non amplius opus sit ipsam longitudinem f in computum ducere.

§. 16. Euidens autem est, quo maius fuerit pondus P , eo maiorem quoque esse debere litteram δ , hanc autem non ultra certum terminum augeri posse, quin bacillus penitus dirumpatur. Quamdiu autem istae elongationes sunt satis paruae, dubitari nequit, quin valor litterae δ

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I. R ipsi

ipfi ponderi P fit proportionalis, quandoquidem in omnibus huiusmodi mutationibus minimis effectus causae semper est proportionalis. Deinde etiam evidens est, si bacillus esset duplo crassior, tum ad eandem elongationem producendam requiri pondus duplo maius; ex quo intelligitur, pondus P tenere rationem compositam ex littera δ et crassitie, quam posuimus $= g g$, ita vt ipsum pondus P semper proportionale fit formulae $\delta g g$.

§. 17. Quo nunc etiam crassitiem $g g$ ex calculo expellamus, loco ponderis P commode substitui poterit pondus voluminis ex eadem materia constantis, quod ergo per similem bacillum, cuius longitudo fit $= p$, repraesentari poterit, ita vt sit $P = p g g$, hoc est vt P aequetur ponderi cylindri ex ipsa materia columnae confecti, cuius basis sit $= g g$ et altitudo $= p$. Quo constituto, cum istud pondus $p g g$ semper sit proportionale formulae $\delta g g$, eandem proportionem tenebit p ad δ ; vnde si statuatur $p = \delta h$, erit h certa quaedam longitudo, quae pro omnibus bacillis ex eadem materia confectis erit eadem, quandoquidem neque a longitudine f neque a crassitie $g g$ pendet; ex quo hanc longitudinem h tanquam veram mensuram tenacitatis seu firmitatis materiae spectare poterimus, de qua quouis casu agitur, ita vt cuique materiae determinata quaedam longitudo h conueniat. Hac igitur semel cognita, si fuerit $\frac{\phi}{f} = \delta$, semper erit $p = \delta h$, eritque p longitudo similis bacilli crassitie $g g$, cuius pondus aequetur ponderi appenso P .

§. 18. Hinc igitur vbicunque materia, ex qua columna est confecta, de statu suo naturali diducitur, ex ipsa di-

diductione determinari poterit vis ad eam producendam
requisita. Consideremus igitur elementum columnae quod-
cunque $E e F f$, cui ob incurvationem inducta sit figura Tab. II.
Fig. 8.
elementi annularis $E e F f$ ex centro R descripti, cuius ra-
dius sit $ER = r$, ipsum vero elementum curvae $E e = ds$,
vbi quidem solam crassitiem EF in figura exhibere li-
cuit, latitudinem autem in singulis punctis x mente sup-
pleri conuenit. Iam intra columnam consideremus punctum
quodcunque X , per quod centro R describatur arcus $X x$,
ac posito interuallo $EX = x$ erit iste arcus

$$X x = \frac{(r+x)ds}{r} = ds + \frac{x ds}{r}$$

cuius longitudo cum in statu naturali fuerit $= E e = ds$,
nunc spatium elongationis, quod supra vocauimus Φ , erit
 $= \frac{x ds}{r}$: hic vero pro longitudine f habemus $E e = ds$. Hinc
ergo cum fuerit $\delta = \frac{\Phi}{f}$, hoc casu erit $\delta = \frac{x}{r}$, quae fractio
ducta in longitudinem illam constantem b , si per totam
columnae crassitiem extendatur, dabit pondus, quod ista
incuruatio postulat.

§. 19. Promoueamus punctum X more solito per
elementum dx , sitque latitudo columnae in $X = y$, atque
elementum voluminis basi $y dx$ insitens in statu naturali
erit $y dx ds$, quod cum elongationem littera $\delta = \frac{x}{r}$ indi-
catam sit passum, vis ad hoc requisita aequabitur ponderi
voluminis $= \frac{b x y dx}{r}$, cuius ergo integrale, per totam ampli-
tudinem sectionis sumtum, dabit totam vim ad incurua-
tionem elementi $F f E e$ requisitam.

§. 20. Pro nostro autem instituto non tam ipsam
hanc vim quam eius momentum respectu puncti E , a quo

incuruatio incipit, exigimus; quam ob rem illa formula $\frac{bxydx}{r}$ insuper in distantiam $EX = x$ duci debet, prodibitque elementum huius momenti $= \frac{bxydx}{r}$, cuius integrale per totam crassitiem sumtum, quod est $\frac{b}{r} \int xxy dx$, ipsum dabit momentum virium ad hanc curuationem producendam requisitum. Quoniam igitur ante idem momentum ex formula rigoris absoluti Ekk ita expressimus, ut esset $\frac{Ekk}{r}$: nunc manifestum est, qualis valor formulae Ekk pro quouis casu tribui debeat; semper enim erit $Ekk = b \int xxy dx$, si modo hoc integrale rite capiatur, ac per amplitudinem columnae circa sectionem EF extendatur.

§. 21. Pendet igitur ista determinatio a figura istius sectionis columnae per EF factae, siue a relatione, quam latitudo y pro quavis abscissa x tenet. Ponamus primo latitudinem vbique esse eandem, scilicet $y = c$, crassitiem vero $EF = b$, atque formula integranda erit

$$\frac{c}{r} \int xxy dx = \frac{1}{3} \frac{c}{r} \frac{b^3 x^3}{b}$$

quae formula vsque ad terminum F extensa, posito $x = b$, dabit momentum ad incuruationem requisitum $= \frac{b^3 c}{3r}$ qui hoc casu est valor formulae superioris $\frac{Ekk}{r}$, ita ut sit $Ekk = \frac{1}{3} b^3 c$. Hinc si aliam columnam consideremus, cuius crassities sit $EF = B$, latitudo vero $= C$, valores formulae Ekk inter se erunt ut $b^3 c : B^3 C$; unde iam intelligitur, si sectiones columnae fuerint inter se similes, quod sit, si fuerit $B : C = b : c$, tum valores formulae Ekk fore in ratione $b^3 : B^3$, quod de omnibus sectionibus similibus valet. Unde si sectiones fuerint circuli, ut supra assumimus, valores formulae Ekk tenebunt rationem biquadraticam diametrorum.

§. 22. Parum quidem refert, pro aliis figuris valores absolutos formulae $E k k$ euoluere; interim tamen speciminis loco computemus casum, quo sectio $E F f e$ est circulus, diametro $E F = b$ descriptus. Hinc ergo pro abscissa $E X = x$ tota latitudo erit $y = 2 \sqrt{b x - x x}$, ita ut sit $E k k = 2 b \int x x d x \sqrt{b x - x x}$, si quidem hoc integrale ab $x = 0$ usque ad $x = b$ extendatur. Pro illo inueniendo ponamus $x = b \sin. \Phi$, erit $b - x = b \cos. \Phi$, hincque $\sqrt{b x - x x} = b \sin. \Phi \cos. \Phi = \frac{1}{2} b \sin. 2 \Phi$; tum vero erit $d x = 2 b d \Phi \sin. \Phi \cos. \Phi = b d \Phi \sin. 2 \Phi$, quibus substitutis fiet $E k k = b^4 \int d \Phi \sin. \Phi^4 \sin. 2 \Phi$, quod integrale extendi debet a $\Phi = 0$ usque ad $\Phi = 90^\circ$.

§. 33. Nunc per notam angulorum *Analyfin* primo est $\sin. \Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. 2 \Phi$, hincque

$$\sin. \Phi^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos. 2 \Phi + \frac{1}{8} \cos. 4 \Phi,$$

porro vero $\sin. 2 \Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. 4 \Phi$, unde conficitur

$$\begin{aligned} \sin. \Phi^4 \sin. 2 \Phi^2 &= \frac{5}{32} - \frac{1}{8} \cos. 2 \Phi - \frac{1}{8} \cos. 4 \Phi \\ &+ \frac{1}{8} \cos. 6 \Phi - \frac{1}{32} \cos. 8 \Phi, \end{aligned}$$

quae formula ducta in $d \Phi$ et integrata dat

$$\begin{aligned} \int d \Phi \sin. \Phi^4 \sin. 2 \Phi^2 &= \frac{5}{32} \Phi - \frac{1}{16} \sin. 2 \Phi - \frac{1}{32} \sin. 4 \Phi \\ &+ \frac{1}{48} \sin. 6 \Phi - \frac{1}{384} \sin. 8 \Phi, \end{aligned}$$

quae expressio iam euanescit facto $\Phi = 0$. Sumatur igitur $\Phi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, ac totum hoc integrale euadet $= \frac{5\pi}{64}$, ita ut sit $E k k = \frac{5\pi b^4 b}{64}$, quae formula ergo utique biquadrato diametri est proportionalis.

§. 24. Regrediamur nunc ad columnam cylindricam supra tractatam, cuius altitudo erat $A C = a$ (Fig. I.)

eius vero diametrum nunc ponamus $= b$, et quoniam modo inuenimus $E k k = \frac{5\pi b^4 h}{64}$, erit onus quod ista columna sustinere valebit ante quam incuruetur $O = \frac{5\pi^2 b^4 h}{64 a a}$, cuius quantitas aequatur ponderi voluminis ex eadem materia confecti, cuius soliditas est haec ipsa quantitas $\frac{5\pi^3 b^4 h}{64 a a}$, siue aequabitur ponderi paris cylindri, cuius diameter $= b$, altitudo vero $= \frac{5\pi^2 b b h}{64 a a}$. Vnde si plures habeantur huiusmodi columnae cylindricae ex eadem materia confectae, onera, quae gestare valent, tenebunt rationem compositam ex directa quadruplicata diametrorum et reciproca duplicata altitudinum; sin autem ex diuersa materia fuerint factae, quoniam cuilibet materiae certa longitudo h conuenit, onera insuper erunt in ratione harum ipsarum altitudinum h .

§. 25. In solutione autem supra data assumimus columnam a solo pondere incumbente O comprimi, ipsum autem columnae pondus negleximus; plerumque autem onus sustentatum tantopere superat pondus proprium columnae, vt error hinc oriundus tuto negligi queat. Interim tamen deinceps operam dabimus, vt etiam rationem proprii ponderis in solutione habeamus, quod in prima solutione, quam olim in loco initio allegato dederam, expedire non sum ausus, ob summas difficultates, quae in hac euolutione occurrebant. Facile autem intelligitur, tali columnae tantam altitudinem tribui posse, vt ne proprium quidem pondus sustentare valeat, etiamsi fuerit $O = 0$, qui ergo Casus vtique peculiarem solutionem postulat.

§. 26.

§. 26. His expositis consideremus aliquot experimenta, quae celeberrimus *Muschenbroekius* de vi columnarum instituit; non autem cylindros adhibuit, sed prismata quadrata, vnde valorem formulae $E k k$ pro sectionibus quadratis explorare oportet. Supra autem iam pro casu $y = c$ inuenimus $E k k = \frac{1}{3} b^3 c b$ (§. 21.), hinc pro experimentis modo memoratis erit $E k k = \frac{1}{3} b^4 b$, vbi b denotat latus sectionis quadratae. Quamobrem si altitudo talis columnae prismaticae fuerit $= a$, onus, quod gestare valebit erit $O = \frac{\pi \pi b^4 b}{3 a a}$. Secundum hanc igitur formulam experimenta illa examinemus.

§. 27. Parauit autem primo *Muschenbroekius* ex abiete trabeculam, 4 pedes longam, prismaticam, cuius basis erat quadratum, cuius latus $= \frac{51}{100}$ digit. eaque in situ verticali constituta dirupta fuit ab imposito pondere 64 libr. 9. unc. Deinde alia trabecula ex eodem ligno confecta pariter quatuor pedes longa sed cuius baseos quadratae latus erat $\frac{70}{100}$ dig., dirupta fuit a pondere 226 libr. Hic ergo erat altitudo, quam vocauimus a , $= 4$ ped. et in posteriore experimento latus quadrati $b = 0,70$ digitis onus vero impositum $O = 226$ lib. Hinc ergo si ex eodem ligno paretur columna prismatica altitudinis $= A$ pedum, cuius baseos latus $= B$ digitor, ista columna sustinere poterit onus, cuius pondus $= \frac{2 \cdot 5 \cdot B^4 a^2}{(0,70)^4 \cdot 1^2}$ libr. ideoque hoc onus erit $15060 \frac{B^4}{A^2}$ libr. Vnde si altitudo A esset $= 20$ ped. et crassities $B = 20$ dig. talis columna sustentare posset onus $= 6024000$ libr.

§. 28. Ex hoc experimento etiam ipsam longitudinem h pro ista specie ligni definire licebit ope aequationis $h = \frac{3aaO}{\pi\pi\pi}$, si modo loco O substituatur massa ex eodem ligno constans, cuius pondus valeat 226 libr. Cum nunc pedis cubici aquae pondus sit circiter 70 libr. grauitas autem specifica huius ligni sit duplo minor quam grauitas specifica aquae, vnus pes cubicus talis ligni pondus habebit 35 libr. quare fiat 35 libr. : 1 = 226 libr. : O , sicque erit $O = \frac{226}{35}$, ideoque in pedibus cubicis erit $O = 6,457$. Reliquas igitur quantitates etiam in pedibus exprimamus, eritque $a = 4$ et $b = 0,058$; vnde ex sequente calculo ipsa longitudo h eruetur

$\begin{array}{r} l. 3aa = 1,6812412 \\ l. O = 0,8100308 \\ \hline l. Num. = 2,4912720 \\ \text{sub. } l. Denom. = 6,0480116 \\ \hline l. h = 6,4432604 \end{array}$	$\begin{array}{r} l. \pi\pi = 0,9942996 \\ 'l. b' = 5,0537120 \\ \hline l. Denom. = 6,0480116 \\ \hline \text{ergo } h = 2774980 \end{array}$
--	---

consequenter pro hac specie ligni longitudo h , qua tenacitatem metimur, valet 2774980 ped. vnde, quantum trabecula ex tali ligno parata a quauis vi elongari possit, definire poterimus. Ita si ipsam trabeculam ab auctore vsurpatam consideremus, cuius longitudo $a = 4$ ped. et bases quadratae latus $= \frac{2}{16}$ digit. eamque a pondere 226 libr. non comprimi sed distendi concipiamus, secundum praecepta supra data hoc pondus 226 libr. per talem trabeculam exprimamus, tam longam, vt eius pondus sit 226 libr. sique haec longitudo $= p$. et quoniam vidimus pondus 226 libr. conuenire massae lignae, cuius volumen $= 6,457$ ped.

ped. cubicor. eritque $b b p = 6,457$ ped. cubicor. Cum igitur in pedibus sit $b = 0,058$, reperietur $p = 1919$. Quodsi iam elongatio istius trabeculae, a tanta tensione orta, vocetur ut supra $= \delta a$, erit $p = \delta b$, ideoque $\delta = \frac{p}{b} = 0,00069$, ideoque ipsa elongatio $\delta a = 0,00276$ ped. in digitis vero erit $\delta a = 0,03312$, siue propemodum $\frac{1}{30}$ digit. id quod ab experientia non abhorreere videtur.

§. 29. In hoc ligno auctor iam observavit, vim, qua columna dirumpitur, satis exacte esse proportionalem biquadrato crassitiei b^4 ; in aliis autem lignis, praecipue in quercu, animaduertit, vim rumpentem in minore ratione quam quadruplicata augeri, cuius phoenomeni ratio sine dubio in indole fibrarum, ex quibus hoc lignum constat, est quaerenda; scilicet, quia aslumsimus, elongationem duplo maiorem etiam vim duplo maiorem postulare, concludere debemus, in ligno quercino plures fibrillas rumpi, antequam elongatio fiat duplo maior, unde etiam renitentia tanto erit minor. Hinc intelligitur, formulae nostrae inuentae, quatenus biquadratum crassitiei b^4 continet, in praxi non nimium tribui posse, et pro varia materiae, ex qua columnae conficiuntur, natura quandam correctionem admitti debere, ex pluribus experimentis determinandam.

§. 30. Quae haecenus de Columnis cylindricis in medium attulimus, haud difficulter ad eiusmodi Columnas transferuntur, quarum crassities certa quadam lege ascendendo decrescit, quod argumentum hic de nouo tractare superfluum foret, propterea quod iam fusius id exposui in dissertatione mea initio allegata. Verum quia tum temporis non videbam, quomodo ipsum quoque pondus columnae

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I. S nae

nae in computum duci queat, istum defectum hic supplere conabor; vbi imprimis sum investigaturus, ad quantam altitudinem columna cylindrica extendi possit, ne sub proprio pondere succumbat, etiamsi superne nulum onus sustentet.

Tab. II.
Fig. 9

§. 31. Referat igitur vt supra curua $AqyB$ axem columnae, qui a proprio pondere iam ad hanc figuram sit reductus, ac ponatur altitudo, quam quaerimus. $AB = a$, et abscissae cuicunque $Ax = x$ respondeat applicata $xy = y$, quae prae abscissa pro infinite parua haberi queat, ita vt in puncto y radius osculi sit $r = -\frac{dx^2}{d^2y}$; tum vero denotet Ekk , vt supra, formulam rigoris, ita vt incuruatio in puncto y postulet virium momentum $= \frac{Ekk}{r} = -\frac{Ekk d^2y}{dx^2}$.

§. 32. Quoniam igitur ista incuruatio a solo pondere portionis superioris columnae Aqy producitur, consideremus eius elementum quodcunque in q , quod respondeat abscissae $Ap = p$ et applicatae $pq = q$, sitque bb crassities columnae per totam eius longitudinem; et cum elementum arcus Aq ipsi elemento abscissae dp aequale spectari possit, eius pondus exprimi poterit formula $bb dp$, quod agit in directione verticali qs ; quam ob causam etiam in formula rigoris Ekk pondus E per massam eiusdem materiae, ex qua columna constat, exhiberi oportebit. Nunc igitur consideremus punctum y tanquam fixum, ad quod vsque puncta q ab A promoueantur, et momentum vis elementaris $bb dp$, in directione qs agentis, respectu puncti y erit $= bb dp (y - q)$, cuius integrale, ob y constans, erit $= bb py - bb \int q dp$, quo momentum ex pondere

dere arcus Aq ortum, exprimitur. Nunc igitur punctum q usque in y promoueat, fietque $p = x$ et $q = y$; unde totum momentum, incuruationem in y producens, erit $bbxy - bbfydx = bbfxdy$, cui ergo aequalis esse debet formula $-\frac{Ekkddy}{dx^2}$, ita ut habeatur ista aequatio:

$$\frac{Ekkddy}{dx^2} + bbfxdy = 0.$$

§. 33. Haec autem aequatio ita est comparata, ut nullo modo ad integrabilitatem perducatur, quae etiam est ratio, cur olim hunc casum euoluere non sim ausus; verum deinceps perspexi, integratione actuali non esse opus, dummodo integrale completum per seriem infinitam euolui queat. Quod quo facilius fieri possit, statuamus breuitatis gratia $Ekk = mbb$, ut haec aequatio habeatur: $\frac{mddy}{dx^2} + \int xdy = 0$, et quia abscissae $x = 0$ etiam applicata y euanescit, statuamus, saltem pro initio seriei quaesitae, $y = \alpha x + \beta xx + \gamma x^3 + \delta x^4$, eritque

$dy = \alpha dx + 2\beta xdx + 3\gamma x^2dx + 4\delta x^3dx$,
hincque

$$\int xdy = \frac{1}{2}\alpha xx + \frac{2}{3}\beta x^3 + \frac{3}{4}\gamma x^4 + \frac{4}{5}\delta x^5,$$

tum vero erit

$$\frac{mddy}{dx^2} = 2m\beta + 6m\gamma x + 2m\delta xx,$$

quae expressio, praecedenti iuncta, nihilo debet esse aequalis; unde fit $\beta = 0$; $\gamma = 0$ et $\delta = \frac{1}{4}\alpha m$; unde intelligimus, seriem quaesitam a termino αx incipere, tum vero, ob $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, sequentes potestates per x^3 incrementum.

§. 34. Hoc obseruato fingamus pro y sequentem seriem:

S 2

$y = Ax$

$y = Ax + Bx^4 + Cx^7 + Dx^{10} + Ex^{13} + Fx^{16} + Gx^{19} + \text{etc.}$
eritque

$$\int x dy = \frac{1}{2} A x x + \frac{4}{5} B x^5 + \frac{7}{8} C x^8 + \frac{10}{11} D x^{11} + \frac{13}{14} E x^{14} + \frac{16}{17} F x^{17} + \text{etc.}$$

ad quam seriem addere debemus istam:

$$\frac{m dy}{dx^2} = 3.4 m B x x + 6.7 m C x^5 + 9.10 m D x^8 + 12.13 m E x^{11} + \text{etc.}$$

quarum serierum summa, quia debet evanescere, dabit sequentes determinaciones:

$$1^\circ. \frac{1}{2} A + 3.4 m B = 0, \text{ hinc } B = -\frac{A}{2.3.4 m}.$$

$$2^\circ. \frac{4}{5} B + 6.7 m C = 0, \text{ hinc } C = -\frac{4 B}{5.6.7 m} = \frac{1.4. A}{2.3.4.7 m^2}.$$

$$3^\circ. \frac{7}{8} C + 9.10 m D = 0, \text{ hinc } D = -\frac{7. C}{8.9.10 m} = -\frac{1.4.7. A}{2.3.4.7.10 m^3}.$$

$$4^\circ. \frac{10}{11} D + 12.13 m E = 0, \text{ hinc } E = -\frac{10 D}{11.12.13 m} = \frac{1.4.7.10 A}{2.3.4.7.13 m^4}.$$

§. 35. His valoribus inuentis applicata y per sequentem seriem infinitam exprimetur:

$$\frac{y}{A} = x - \frac{1. x^4}{2.3.4 m} + \frac{1.4 x^7}{2.3.7 m^2} - \frac{1.4.7 x^{10}}{2.3.7.10 m^3} + \frac{1.4.7.10 x^{13}}{2.3.7.13 m^4} \text{ etc.}$$

quae expressio rite ad casum nostrum est accommodata: continet enim adhuc vnam constantem arbitrariam A ; altera vero iam inde est determinata, quod facto $x = 0$ etiam fieri debeat $y = 0$. Transferamus nunc punctum y in terminum imum B , ponendo $x = a$, et quia hic applicata y evanescere debet, prodibit ista aequatio infinita:

$$0 = 1 - \frac{1. a^3}{2.3.4 m} + \frac{1.4 a^6}{2.3.7 m^2} - \frac{1.4.7 a^9}{2.3.7.10 m^3} + \frac{1.4.7.10 a^{12}}{2.3.7.13 m^4} \text{ etc.}$$

ex qua ipsam altitudinem columnae $AB = a$ eruere oportet: sic enim inueniemus eam nostrae columnae altitudinem, in qua iam a proprio suo pondere incuruari incipiet:

cipiet. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia $\frac{a^5}{m} = v$,
vt resoluenda proponatur haec aequatio:

$$0 = 1 - \frac{1 \cdot v}{2 \cdot 1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 \cdot v \cdot v}{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot v^3}{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10} \text{ etc.}$$

sicque totum negotium huc est reductum, vt inueniatur
valor litterae v , qui hanc seriem infinitam nihilo reddat
aequalem; hoc enim valore inuento altitudo columnae
quaesita erit $a = \sqrt[5]{m \cdot v}$.

§. 36. Euident est hanc seriem vehementer con-
vergere, quantumvis etiam magnus numerus pro v ac-
cipiatur. Primo autem hic obseruamus, quamdiu fuerit
 $v < 24$, quoniam termini iam ab initio continuo decres-
cunt, seriei summam necessario esse positiuam; vnde patet,
numerum v necessario maiorem esse debere quam 24.
Quo autem resolutionem huius aequationis faciliorem red-
damus, ponamus $v = 6u$, vt sit $a = \sqrt[5]{6mu}$, et aequa-
tionem hinc natam hoc modo repraesentemus:

$$0 = 1 - \alpha u + \beta u^2 - \gamma u^3 + \delta u^4 - \varepsilon u^5 \text{ etc.}$$

eritque

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4}; \beta = \frac{6}{35} \alpha; \gamma = \frac{7}{120} \beta; \delta = \frac{10}{180} \gamma; \varepsilon = \frac{13}{360} \delta; \\ \zeta &= \frac{16}{980} \varepsilon; \eta = \frac{19}{1315} \zeta; \theta = \frac{22}{2303} \eta; \iota = \frac{25}{3478} \theta; \kappa = \frac{28}{4403} \iota; \\ \lambda &= \frac{31}{5984} \kappa; \mu = \frac{34}{7770} \lambda \text{ etc.} \end{aligned}$$

Hinc in subsidium sequentium calculorum colligamus ha-
rum litterarum logarithmos, eosque cum suis differentiis
primis et secundis ordine referamus hoc modo:

Logarithmi literarum α, β, γ etc.	Differentiae primae.	Differentiae secundae.
$l\alpha = 9,3979400$	0,9420080	0,2920752
$l\beta = 8,4559320$	1,2340832	0,2222828
$l\gamma = 7,2218488$	1,4563660	0,1778786
$l\delta = 5,7654828$	1,6342446	0,1479592
$l\varepsilon = 4,1312382$	1,7822038	0,1265633
$l\zeta = 2,3490344$	1,9087671	0,1105380
$l\eta = 0,4402673$	2,0193051	0,0980988
$l\theta = 8,4209622$	2,1174039	0,0881678
$l\iota = 6,3035583$	2,2055717	0,0800582
$l\kappa = 4,0979866$	2,2856299	0,0733122
$l\lambda = 1,8123567$	2,3589421	
$l\mu = 9,4534146$		

§. 37. His praeparatis ad radicem aequationis propositae $0 = 1 - \alpha u + \beta u u - \gamma u^3 + \delta u^4$ etc. inueniendam utamur methodo per series recurrentes procedente, quae iubet talem seriem formare ex scala relationis $\alpha, -\beta, \gamma, -\delta, \varepsilon, -\zeta$ etc. quae fit 1, A, B, C, D, E, F etc. ita ut sit $A = \alpha$; $B = \alpha A - \beta$; $C = \alpha B - \beta A + \gamma$; $D = \alpha C - \beta B + \gamma A - \delta$; $E = \alpha D - \beta C + \gamma B - \delta A + \varepsilon$ etc. tum vero sequentes fractiones continuo propius ad radicem ipsius u appropinquabunt: $\frac{1}{A}$; $\frac{A}{B}$; $\frac{B}{C}$; $\frac{C}{D}$; $\frac{D}{E}$ etc. Calculo igitur instituto termini huius seriei recurrentis sequenti modo determinabuntur:

$$\begin{aligned}
 A &= 0,25 \\
 B &= 0,033929 \\
 C &= 0,00300610 \\
 D &= 0,0001448750 \\
 E &= - 0,000006336562
 \end{aligned}$$

Quo-

Quoniam hic litera F valorem sortita est negativum, hinc iam tuto concludere possumus, aequationem nostram propositam nullam plane habere radicem realem, quod etiam inde patet, quod fractiones supra allatae $\frac{1}{A}$; $\frac{A}{B}$; $\frac{B}{C}$; etc. ad nullum certum terminum conuergunt: fit enim

$$\frac{1}{A} = 4; \frac{A}{B} = 7; \frac{B}{C} = 11; \frac{C}{D} = 20; \frac{D}{E} = -23.$$

§. 38. Aequatio igitur infinita $\phi = 1 - \alpha u + \beta u^2$ etc. ita est comparata, vt nullam plane radicem realem inuoluat, ideoque nullus datur numerus, quantumuis magnus accipiat, pro u , qui summam huius seriei reddat nihilo aequalem, sed quicumque numerus pro u accipiat, summa seriei $1 - \alpha u + \beta u^2 - \gamma u^3 + \delta u^4$ etc. semper erit positua, quam adeo quouis casu assignare licebit. Ponamus enim verbi gratia $u = 10$, et singulos terminos istius seriei euoluamus; vbi quidem termini ab initio vehementer diuergent, mox autem ita conuergent, vt sequentium omnium summa haud difficulter assignari queat. Singuli autem huius seriei termini sequentes adipiscuntur valores:

$$\begin{aligned} + 1 &= 1,0000000 \\ - \alpha u &= -2,5000000 \\ + \beta u^2 &= 2,8571428 \\ - \gamma u^3 &= -1,6666666 \\ + \delta u^4 &= 0,5827506 \\ - \epsilon u^5 &= -0,1352814 \\ + \zeta u^6 &= 0,0223375 \\ - \eta u^7 &= -0,0027603 \\ + \theta u^8 &= 0,0002636 \\ - i u^9 &= -0,0000201 \\ + k u^{10} &= 0,0000012 \end{aligned}$$

Quodsi

Quodsi iam huius seriei ab initio duo, tres, quatuor, quinque termini coniungantur, prodibunt numeri alternatim maiores, vel minores quam vera summa, veluti hic representatur.

Termini	Summa
1.	1,0000000
2.	— 1,5000000
3.	1,3571428
4.	— 0,3095238
5.	0,2732275
6.	0,1379461
7.	0,1602836
8.	0,1575233
9.	0,1577869
10.	0,1577668
11.	0,1577680

Vnde patet, veram summam contineri intra hos limites: 0,1577668 et 0,1577680, ideoque medium sumendo vera summa aestimari potest = 0,1577674.

§. 39. His observatis sequens paradoxon maxime memorabile se nobis offert: quod columnae cylindricae, ad quamcunque altitudinem etiam porrigantur, nunquam sub proprio pondere succumbant, quod vtiq; eo magis est admirandum, quod aucta columnae altitudine onus sustentandum decreseat in ratione duplicata altitudinem, etiam si proprium pondus columnae negligatur; ex quo concludi debere videbatur, si etiam proprii ponderis ratio habeatur, onus sustentandum adhuc magis diminui, atque adeo

adeo tandem penitus euanescere debere, ita vt columna nimis alta nullum plane onus gestare valeret, quod tamen nunc longe aliter se habere inuenimus. Haec autem omnia accuratius examen requirunt, quod in sequente dissertatione instituemus.

EXAMEN INSIGNIS PARADOXI
IN
THEORIA COLUMNARVM
OCCVRRENTIS.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Non solum maxime paradoxa, verum etiam vehementer suspecta videri debet conclusio, ad quam in superiore dissertatione, *de vi Columnarum* agentes, fumus perducti: quod scilicet nulla columna cylindrica, quantumvis fuerit alta, vnquam a proprio pondere frangatur. Cum enim, aucta altitudine columnae, eius vis onera gestandi secundum duplicatam rationem diminuatur, vtique tanta dabitur altitudo, qua columna ne leuissimum quidem pondusculum sustinere valeret; vnde maxime absurdum videtur, quod talis columna, etiamsi in immensum vltius eius altitudo augetur, tamen nunquam diffringi debeat. Hanc ob rem maxime necessarium videtur, omnes rationes, quibus ista conclusio innititur, accuratius perpendere.

§. 2. Totum autem iudicium super hac quaestione pendet a natura istius seriei infinitae:

$$1 - \frac{v}{4, 1,} + \frac{v^2}{7, 1, 5} - \frac{v^3}{10, 1, 5, 12} + \frac{v^4}{13, 1, 5, 12, 22} - \frac{v^5}{16, 1, 5, 12, 22, 35} + \text{etc.}$$
 vbi numeri 1, 5, 12, 22, 35, etc. seriem pentagonalium con-

constituunt, atque tota quaestio huc reducitur: vtrum summa huius seriei vnquam fieri possit nihilo aequalis, nec ne? Hic primo quidem statim patet, quamdiu numerus v fuerit vnitatem minor, summam huius seriei necessario semper esse positivam, id quod etiam euenire deprehendi, etiam si valor ipsius v multo maior accipiat. Neque vero ob summas calculi difficultates centenariis maiores valores ipsius v examini subiici possunt.

§. 3. Confugiendum ergo sum arbitratus ad methodum, radices aequationum per series recurrentes explorandi, quippe qua olim iam in simili quaestione, cum in motum oscillatorium catenae libere suspensae inquirerem, felici successu sum usus; verum praesenti casu ista methodus penitus inutiliter est adhibita, vnde concludere non dubitavi, nullos prorsus pro v dari valores reales, quibus illa series prorsus ad nihilum redigatur.

§. 4. Interim tamen certum est, istam methodum, radices aequationum per series recurrentes explorandi, maxime esse lubricam, et saepissime in errores inducere posse, cuius defectus vnicum exemplum attulisse iuuabit, circa hanc aequationem tantum cubicam: $x^3 - 2x^2 + 4xz - 3z^2 = 0$, cuius vna radix manifesto est $z = 1$; at si ex scala relationis 2, -4, +3 series recurrens formetur, ea prodit

$$1 + 2 + 0 - 5 - 4 + 12 + 25 - 10 - 84, \text{ etc.}$$

vnde radix cognita nullo modo concludi potest. Ratio autem huius defectus in radicibus imaginariis est quaerenda, et quoniam nostra aequatio sine vlllo dubio plurimas, si non omnes, inuoluit radices imaginarias, mirum non est hanc operationem successu caruisse.

§. 5. Fateri igitur cogimur, hinc nihil tuto concludi posse, vtrum aequatio proposita radices habeat reales, nec ne, atque hic potius nostrum iudicium suspendere conueniet. Quamobrem ista ipsa aequatio:

$$0 = 1 - \frac{v}{4.1} + \frac{v^2}{7.1.5} - \frac{v^3}{10.1.5.12} + \frac{v^4}{13.1.5.12.22} - \text{etc.}$$

omnino digna videtur, vt Geometrae omni studio in eius naturam inquirant.

Tab. III.
Fig. 1.

§. 6. Quoniam autem haec aequatio nata est ex consideratione illius lineae curuae, ad quam tales columnae, a sola grauitate sollicitatae, inflecti deberent ante quam rumperentur, necesse erit huius curuae symptomata accuratius examini subiicere. Referat igitur recta verticalis A B huiusmodi columnam, sitque A Y B ea linea curua, ad quam inflecti debet, antequam penitus corruat; atque inter eius coordinatas A X = x et X Y = y sequens inuenta est aequatio infinita:

$$\frac{Y}{A} = x - \frac{1. x^4}{2. 3. 4. m} + \frac{1. 4 x^7}{2. 5. 7. m^2} - \frac{1. 4. 7 x^{10}}{2. 5. 7. 10. m^3} + \text{etc.}$$

Quoniam igitur in infimo columnae termino B applicata y iterum euanescere debet, hic ante omnia inuestigari oportet abscissam illam x, cui respondeat applicata euanescent y = 0, quandoquidem haec ipsa abscissa aequabitur altitudini totius columnae A B; quamobrem si hoc, vti visum erat, nunquam euenire posset, sed, etiamsi abscissae x in infinitum augeantur, applicatae tamen semper positium fortirentur valorem, id vtique certum foret signum, columnam etiam infinite altam sub proprio pondere nunquam succumbere debere, propterea quod alter columnae terminus B in infinitum remoueretur.

§. 7. Vt igitur accuratius in formam huius columnae inquiramus, ponamus br. gr. $x^3 = m t$, vt fit $x = \sqrt[3]{m t}$, et habebimus hanc aequationem:

$$\frac{x}{A x} = 1 - \frac{1 \cdot t}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 t^2}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 t^3}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 t^4}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 13} - \text{etc.}$$

quam seriem littera s indicemus, ita vt fit $\frac{x}{A} = s x = s \sqrt[3]{m t}$. Ad hoc igitur examen instituendum litterae t successive tribuamus valores continuo maiores, et pro singulis compute- mus valores respondentes tam ipsius s quam formulae $s \sqrt[3]{t}$, atque hos valores, prouti, instituto calculo, sumus adepti, in sequenti tabula referamus:

t	s	$s \sqrt[3]{t}$
0	1,0000	0,0000
10	0,6556	1,4125
20	0,4290	1,1645
30	0,2882	0,8955
40	0,2086	0,7134
50	0,1712	0,6307
60	0,1577	0,6173
70	0,1629	0,6672
80	0,1744	0,7515
90	0,1897	0,8501
100	0,2046	0,9496
120	0,2248	1,1088
240	0,1856	1,1534
400	0,1338	0,9850

§. 8. Secundum hanc tabellam extruximus binas curvas, ad axem, in quo abscissae t capiuntur, relatas, qua-

Tab. III. rum altera exhibet valores litterae s , altera vero (Fig. 3.)

Fig. 2.
et 3. valores formulae $s \sqrt[3]{t}$, quae posterior figura ergo ipsam curuam, quam columnae tribuimus, repraesentabit, si modo notetur, applicatas secundum modulum multo maiorem esse expressas, quo variationes earum clarius in oculos incidere-
rent. Principalis igitur quaestio huc redit, vtrum hae duae curuae, continuo magis prolongatae, tandem per axem sint transiturae? Manifestum enim est, talem transitum in am-
babus curuis simul contingere debere.

§. 9. Quod si iam siue illam tabellam, siue figu-
ras inde delineatas attente consideremus, circa valores lit-
terae s generatim obseruamus, eos propius versus axem
conuergere, interea autem miris inflexionibus modo ma-
gis ab axe recedere modo propius accedere, atque adeo
in hac curua plura maxima et minima occurrere; veluti,
primum minimum deprehenditur prope abscissam $t = 60$;
deinde vero applicatae iterum crescunt, vsque ad $t = 120$,
inde vero iterum decrescunt propemodum vsque ad 400.
Quamobrem, cum satis certi esse queamus, valores mini-
mos, quippe qui secundum numeros 0, 1577 et 0, 1338
procedunt. continuo propius ad axem accedere, hinc iam
satis probabile videtur, eos tandem, veruntamen valde fero,
penitus evanescere, quod autem ob defectum subsidiorum
calculi nondum definire licet.

§. 10. Simili modo propemodum res se habet in
altera figura, quae ipsam columnae figuram referre censenda
est, vbi ab initio $t = 0$ applicatae subito increscunt,
vsque ad terminum circiter $t = 8$, vbi applicata singulari
cal-

calculo circiter inuenta est $\approx 1,60$; hinc autem per $t \approx 10$ procedentes satis repente decrefcunt, dum circa $t \approx 60$ minimum quasi valorem attingunt, hinc vero vsque ad $t \approx 120$ satis ingenti saltu affurgunt, inde multo lentius iterum decrefcunt vsque ad $t \approx 400$, hincque iterum increfcendo satis vniformiter ascendunt, quovsque quidem nobis calculum instituere licuit. Hic igitur nulla ratio occurrir, vnde concludere, probabili faltem modo, licere t, iftas applicatas tandem penitus euanefcere.

§. 11. Cum igitur ifta quaefitio maximi fit momenti atque fine dubio summam attentionem mereatur, haud parum lucis afferre poterit inueftigatio omnium locorum, vbi applicatae posterioris curuae euadunt vel maximae vel minimae, quandoquidem totum iudicium ad folas applicatas minimas reuocatur, quae fi nusquam penitus euanefcerent, certum id foret fignum, conclufionem fupra memoratam veritati effe confentaneam.

§. 12. Cum igitur applicatae huius curuae ibi fiant vel maximae vel minimae, vbi fuerit $\frac{dy}{dx} = 0$, ex ferie fupra exhibitā concludimus

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot m} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot m^2} - \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot m^3} + \frac{x^{12}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12 \cdot m^4} - \text{etc.}$$

Ponamus igitur vt ante $x^3 = mt$, ac perueniemus ad hanc aequationem infinitam:

$$0 = 1 - \frac{t}{2 \cdot 3} + \frac{t^2}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{t^3}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{t^4}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12} - \text{etc.}$$

cuius ergo radices inueftigare oportet: euidens autem est pri-

primam, siue minimam radicem, aliquanto maiorem esse debere quam primum denominatore $n = 2 \cdot 3 = 6$.

§. 13. Calculus autem ad hoc negotium requisitus haud difficulter per logarithmos institui poterit; si enim ipsos terminos huius seriei per cyphas romanas designemus, ut sit $I = 1$, logarithmi sequentium iuxta tabulam subnexam colliguntur:

$II = I + t - 16$	0, 7781513
$III = II + t - 130$	1, 4771213
$IV = III + t - 172$	1, 8573325
$V = IV + t - 1132$	2, 1205739
$VI = V + t - 1210$	2, 3222193
$VII = VI + t - 1306$	2, 4857214
$VIII = VII + t - 1420$	2, 6232493
$IX = VIII + t - 1552$	2, 7419391
$X = IX + t - 1702$	2, 8463371
$XI = X + t - 1870$	2, 9395193
$XII = XI + t - 11056$	3, 0236639
$XIII = XII + t - 11260$	3, 1003705
$XIV = XIII + t - 11482$	3, 1708482
$XV = XIV + t - 11722$	3, 2370331
$XVI = XV + t - 11980$	3, 2966652
$XVII = XVI + t - 12256$	3, 3533390
$XVIII = XVII + t - 12550$	3, 4065402
$XIX = XVIII + t - 12862$	3, 4566696
$XX = XIX + t - 13192$	3, 5040629

§. 14. Hoc modo primo fecimus calculum pro $t = 8$, prodiiitque seriei summa negativa $= -0,0149$;
sumto

sumto autem $t = 7,50$, summa prodiit positiua $= 0,0318$, vnde concludimus, verum valorem primae radices esse $t = 7,840$, cui in curua respondere debet applicata maxima. Deinde, quia ex figura colligere licet, sequens minimum cadere inter $t = 50$ et $t = 60$, instituto calculo pro $t = 60$, prodiit summa seriei $t = +0,1144$: at pro $t = 50$ prodiit summa $= -0,1791$; vnde tuto concludere licet, ipsum minimum respondere abscissae $t = 56,10$.

§. 15. Pro sequente maximo eruendo faciamus calculum pro abscissa $t = 150$, hincque seriei summa reperitur $= -0,0244$; at vero, sumto $t = 145$, prodiit $+0,2736$; vnde concluditur, maximum istud convenire cum $t = 149,59$. Nimis autem operosum foret istum calculum ulterius prosequi; verum ipsa aequatio suppeditat certam rationem, sequentes valores ipsius t satis exacte colligendi. Cum enim aequationis secundus terminus sit $\frac{1}{2}t$, patet, si literae $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, denotent omnes radices ipsius t , tum necessario esse debere $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{etc.} = \frac{1}{2}$. Praeterea vero rationes non desunt, quod istae radices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, secundum legem satis simplicem progrediantur et earum differentiae secundae pro constantibus haberi possint. Quamobrem cum tres primae radices inuentae sint $\alpha = 7,84$; $\beta = 56,10$ et $\gamma = 149,59$, differentiae primae sunt $48,26$; $93,49$; vnde oritur differentia secunda $45,23$. Hinc igitur, quousque libuerit, loca maximorum et minimorum continuari poterunt. En paradigma:

Diff. II.	Diff. I.	Termini.
45, 23	48, 26	7, 84 Max.
45, 23	93, 49	56, 10 Min.
45, 23	138, 72	149, 59 Max.
45, 23	183, 95	288, 31 Min.
45, 23	229, 18	472, 26 Max.
45, 23	274, 41	701, 44 Min.
45, 23	319, 64	975, 85 Max.
45, 23	364, 87	1295, 49 Min.

§. 16. Potest etiam in genere talis series inuestigari, cuius summa fit $= \frac{1}{\alpha}$. Statuatur enim series

$$s = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \text{etc.}$$

et cum hinc fit

$$s - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \text{etc.},$$

posterior series a priore sublata relinquit hanc:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{A - \alpha}{\alpha A} + \frac{B - A}{A B} + \frac{C - B}{B C} + \frac{D - C}{C D} + \text{etc.}$$

Iam fiat

$$\frac{A - \alpha}{\alpha A} = \frac{1}{\alpha}, \text{ siue } \frac{\alpha A}{A - \alpha} = \alpha;$$

tum vero

$$\frac{A B}{B - A} = \beta, \frac{B C}{C - B} = \gamma, \text{ etc.}$$

hincque, ob α, β, γ , cognita, reperitur

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \alpha} = 25, 56, B = \frac{\beta A}{\beta - A} = 46, 95,$$

$$C = \frac{\gamma B}{\gamma - B} = 68, 43, \text{ etc.}$$

Iam nullum est dubium, quin isti numeri, terminum primum sequentes, satis regulariter progrediantur, et, nisi adeo progressionem arithmetica constituant, tum saltem eorum diffe-

differentiae secundae quasi sint aequales. Sunt vero differentiae primae 19, 56; 21, 39; 21, 48; quae parum a numero 20 discrepant; sin autem differentias secundas admittere velimus, eae propemodum unitati aequales statui possunt. Ceterum pro instituto nostro parum referet, siue valores, pro litteris $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. exhibiti, sint ad amussim exacti, nec ne, si adeo calculum ulterius prosequi vellemus; verum cum inde nihil plane certi circa Paradoxon memoratum concludere valeamus, atque etiamnunc in dubio sit relinquendum, vtrum curua nostra alicubi cum axe concurrat nec ne, hanc Analysin, quippe quae sola nihil decidere videtur, deferamus, nostramque quaestionem ex principiis Mechanicis examinemus.

Examen eiusdem Paradoxi, ex Principiis Mechanicis petitum.

§. 17. Consideremus columnam quamcunque, cylindricam, determinatam A B, quae sub dato pondere, quod sit $= P$, corruat. Iam loco huius ponderis substituatur alia columna A P, eiusdem diametri, cuius longitudo sit $= p$, quae ergo, illi columnae superimposita, evndem effectum erit praestatura, et columnam A B diffriquet. Tab. II
Fig. 4.

§. 18. Quanquam autem hoc modo obtinetur columna quasi vnica P A B, sub proprio pondere succumbens, tamen hinc quaestio nostra non conficitur. Quoniam enim haec columna in A quasi est dissecta, dubitari omnino nequit, quin talis columna, si continua, multo plus roboris effet habitura. Accuratus igitur examinemus, quomodo continuitas ambarum columnarum impedire possit, quominus inferior columna A B frangatur, cum tamen hic

V 2

effe-

effectus certe contingeret, si superior pars A P tantum simpliciter esset imposita.

§. 19. In superiore autem dissertatione columnam A B ita ab onere imposito rumpi sumus contemplati, ut primo instanti certam quandam curvaturam A Y B accipiat; dum termini A et B in eodem situ verticali perseverant; atque hanc curvam ita comparatam esse inuenimus, ut in A cum verticali A B angulum finitae magnitudinis X A Y constituat, quoniam, positis coordinatis $A X = x$ et $X Y = y$, talis aequatio est eruta: $y = \alpha x - \beta x^2 + \text{etc.}$; unde, sumto x infinite paruo, foret $y = \alpha x$, ideoque α exprimeret tangentem anguli X A Y. Haec igitur inflexio tanquam effectus spectari debet, a pondere columnae superimpositae A P oriundus.

§. 20. Manifestum autem est, istum effectum nullo modo produci posse, si superior columna cum inferiore firmiter esset connexa; propterea quod suprema portiuncula A X a situ verticali declinari nequit, nisi simul infima portiuncula superioris partis A P similem declinationem accipiat, ad alteram scilicet partem, veluti A Z, tendentem, quod autem ob continuitatem totius columnae contingere nequit.

§. 21. Quamdiu autem superior pars A P situm verticalem seruat, inferior portio A B, siquidem fractioni fuerit obnoxia, aliam inflexionem recipere nequit, nisi in qua angulus X A Y penitus evanescat, et curvae A Y tangens in puncto A sit verticalis. Quoniam igitur haec
ratio

ratio frangendi prorsus discrepat ab illa, quam supra tractauimus, in eam hic accuratius inquiramus.

§. 22. Hunc in finem supremam columnae AB portinniculam laqueari fixo esse infixam concipiamus, siue ita a viribus horizontalibus vtrinque detineri, vt a situ verticali deflectere penitus nequeat. Scilicet, dum portio AY incuruatur, ad punctum superius a in situ verticali conseruandum, necesse est, vt a vi quadam horizontali aq sollicitetur, ne istud punctum retrocedere queat, quem ergo effectum firmitas laquearis praestare est censenda. Tum vero, ne tota columna ab ista vi horizontali aq prosterni queat, in puncto A aequalis vis horizontalis AQ , contrarie agens, est concipienda, quae istum effectum destruat. Interim tamen hae duae vires non impedire debent, quominus columna imposita AP toto suo pondere in columnam inferiorem agat, eamque deprimat.

Tab. I
Fig. 5

§. 23. Ad hunc ergo casum euoluendum vocemus istas vires horizontales $AQ = aq = Q$, et interuallum $Aa = \alpha$, ita vt nunc tres habeamus vires, quibus columna inferior sollicitatur, siquidem praeter has vires horizontales adhuc a pondere superimposito P deorsum vrgetur; a quibus viribus quomodo columna haec AB inflecti debeat, iam indagabimus, vbi quidem ipsum pondus columnae inferioris negligere licebit; nam si, eo neglecto, columna AB a pondere superimposito AP inflecti poterit, multo magis, accedente proprio pondere, talem inflexionem pati debebit.

§. 24. Ponamus igitur vt supra abscissam $AX = x$ et applicatam $XY = y$; atque a pondere incumbente P ad inflexionem in puncto Y producendam oriatur mo-

mentum = $P y$. In eandem porro plagam a vi horizontali $A Q = Q$ momentum nascitur = $Q x$; ab altera vero vi horizontali $a q = Q$ momentum producitur in plagam contrariam vergens, quod erit = $Q (\alpha + x)$; quibus tribus momentis collectis totum momentum, columnam principalem $A B$ incuruans, erit = $P y - Q \alpha$.

§. 25. Hoc iam momento incuruationis inuento in §. 12. superioris dissertationis: *De oneribus, quae columnae gestare valent*, loco $O y$ tantum scribi oportebit $P y - Q \alpha$, vnde nanciscimur hanc aequationem:

$$P y - Q \alpha + \frac{E k k d d y}{d x^2} = 0,$$

quae autem nunc ita integrari debet, vt, posito $x = 0$, non solum fiat $y = 0$, sed etiam $\frac{d y}{d x} = 0$. Praeterea vero, si columnae altitudo ponatur = a , applicata y insuper euanescere debet posito $x = a$.

§. 26. Diuidatur aequatio modo allata

$$P y - Q \alpha + \frac{E k k d d y}{d x^2} = 0$$

per P , et ponatur $\frac{E k k}{P} = c c$; tum vero fiat $\frac{Q \alpha}{P} = b$, vt habeatur haec aequatio simplicior:

$$y - b = - \frac{c c d d y}{d x^2}, \text{ siue } z = - \frac{c c d d z}{d x^2},$$

posito scilicet $y - b = z$, cuius integrale completum est

$$z = y - b = \mathfrak{A} \sin. \frac{x}{c} + \mathfrak{B} \cos. \frac{x}{c}.$$

Cum igitur, posito $x = 0$, fieri debeat $y = 0$, pro constantibus determinandis habetur primo haec determinatio:

$\mathfrak{B} = -b$; deinde cum sit $\frac{d y}{d x} = \frac{\mathfrak{A}}{c} \cos. \frac{x}{c} - \frac{\mathfrak{B}}{c} \sin. \frac{x}{c}$, vt posito $x = 0$ fiat quoque $\frac{d y}{d x} = 0$, obtinetur haec altera

aequa-

aequatio: $x = 0$; quocirca aequatio, curuam nostram exprimens, erit

$$y - b = -b \cos. \frac{x}{c}, \text{ siue } y = b (1 - \cos. \frac{x}{c}).$$

§ 27. Augeatur nunc abscissa x vsque ad totam columnae altitudinem a , et quia, posito $x = a$, fieri debet $y = 0$, orietur haec noua aequatio: $b (1 - \cos. \frac{a}{c}) = 0$, cui satisficit ponendo $\cos. \frac{a}{c} = 1$. Fit autem $\cos. \frac{a}{c} = 1$ casibus $\frac{a}{c} = 0$, vel $\frac{a}{c} = 2\pi$, etc.; atque hinc pondus determinabitur, quod istam columnam ad rupturam adiget. Cum enim sit $c = \frac{a}{\frac{2}{3}\pi}$, ob $c = k \sqrt{\frac{E}{P}}$. (vid. §. 26.), reperitur hoc pondus $P = \frac{4\pi\pi E k k}{a a}$, quae ergo quantitas pariter sequitur rationem quadruplicatam crassitiei directam et reciprocam duplicatam altitudinis. Cum igitur in casu praecedentis dissertationis inuentum fuisset onus $O = \frac{\pi\pi E k k}{a a}$, nostro casu pondus, quod eadem columna, quando superne in A laqueari est infixata, gestare valet, quadruplo erit maius.

§. 28. Conuertatur nunc istud pondus P in columnam pariter cylindricam eiusdem diametri, ac ponatur, pondus nostrae columnae AB , cuius altitudo $= a$, esse $= A$, altitudinem vero illius columnae super imponendae, cuius pondus inuenimus $= \frac{4\pi\pi E k k}{a a}$, $= p$, eritque

$$a : p = A = \frac{4\pi\pi E k k}{a a},$$

vnde colligitur altitudo $p = \frac{4\pi\pi E k k}{A a}$. Quod si ergo talis columna AP inferiori AB imponatur, vt habeatur columna altitudinis $PB = a + \frac{4\pi\pi E k k}{A a}$, haec certe proprio sub suo pondere succumbere debet, siquidem a viribus ho-

horizontalibus A Q et a q constringitur, quippe quae vires vicem gerunt continuitatis: quam ob rem nullum amplius dubium superesse potest, quin, remotis istis viribus horizontalibus, columna pariter sit prolapsura, quoniam remotio harum virium roborem columnae certe non auget.

§. 29. Ecce ergo reuera exhiberi poterit columna tantae altitudinis, quae sub proprio pondere necessario prosterneatur, quandoquidem hoc eueniet, si tota columnae altitudo fuerit $= a + \frac{4\pi\pi Ekk}{Aa}$; atque adeo evidens est, talem columnam, notabiliter adeo breuiorem, fractioni resistere non posse. Ponatur enim altitudo inuenta

$$a + \frac{4\pi\pi Ekk}{Aa} = b,$$

fitque C pondus columnae, cuius altitudo $= c$, ita vt fit

$$A = \frac{Ca}{c}, \text{ eritque } b = a + \frac{4\pi\pi c Ekk}{Ca},$$

in qua expressione si quantitates C et c vt constantes spectemus, eiusmodi valor pro a assignari poterit, vnde altitudo b minimum fortiatur valorem; reperitur enim differentiando

$$\frac{db}{da} = -\frac{4\pi\pi c Ekk}{Ca^2} = 0,$$

vnde colligitur

$$a^3 = \frac{4\pi\pi c Ekk}{C} \text{ ideoque } a = \sqrt[3]{\frac{4\pi\pi c Ekk}{C}},$$

quo valore substituto fiet altitudo columnae caducae, quam quaerimus, $b = 3\sqrt[3]{\frac{4\pi\pi c Ekk}{C}}$. Hinc igitur tandem pro certo asseuerare possumus, pro quauis columnae crassitie et robore semper eiusmodi assignari posse altitudinem, quae ob proprium suum pondus rupturae resistere non valeat; sicque

ficque paradoxon, et quaestio super eo nata, iam manifesto est soluta; quamobrem ea, quae in superiore dissertatione sub finem in sententiam, hic assertae contrariam, sunt allata, siue dubie exposita, nunc facile emendari poterunt.

§. 30. Quo vim formulae pro altitudine h inuentae clarius perspiciamus, in eam introducamus onus, quod columna altitudinis c , cuius pondus statuimus $= C$, sustinere valet, et quod, per experimenta explorandum, tanquam cognitum spectemus. Sit istud onus $= \Gamma$, atque ex superiore dissertatione habemus $\frac{\pi \pi E k k}{c c} = \Gamma$, ita vt habeamus $\pi \pi E k k = \Gamma c c$, qui ergo valor substituatur in formula pro altitudine h inuenta, ac reperietur

$$h = 3 \sqrt[3]{\frac{\Gamma c^3}{c}} = 3 c \sqrt[3]{\frac{\Gamma}{c}};$$

vbi fracto $\frac{\Gamma}{c}$ denotat, quoties onus, ab hac columna sustentatum, ipsum eius pondus superat, cuius ergo radix cubica, per $3 c$ multiplicata, praebet altitudinem columnae ex eadem materia confectae et eiusdem diametri, quae sub proprio suo pondere certe succumbet.

§. 31. Quoniam igitur altitudinem h inuenimus columnae, quae proprium pondus certe sustinere nequit, hinc iam vicissim in linea curua, quam modo ante inuenimus, eam abscissam assignare poterimus, cui applicata euanesceat respondere debet. Primo scilicet, posito $E k k = m b b$, inter coordinatas x et y hanc adepti sumus aequationem:

$$\frac{y}{A} = -x \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m} + \frac{1 \cdot 4 \cdot x^7}{2 \cdot \dots \cdot 7 \cdot m^2} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot x^{10}}{2 \cdot \dots \cdot 10 \cdot m^3} + \text{etc.}$$

deinde statuimus $\frac{x^3}{m} = t$, ita vt sit $t = \frac{x^3 b b}{E k k}$. Modo autem vidimus esse $E k k = \frac{\Gamma c c}{\pi \pi}$. Quod si ergo iam hic ipsi x

tribuamus valorem totius altitudinis b , ob

$$b^3 = 27 c^3 \cdot \frac{\Gamma}{c} \text{ fiet } t = \frac{27 b^3 \pi \pi c}{c}.$$

Quoniam autem c exprimit altitudinem nostrae columnae, et C eius pondus, erit $C = b b c$, quo valore substituto fit $t = 27 \pi \pi$; vnde discimus, iam ante terminum $t = 27 \pi \pi = 266$ circiter locum existere debere, vbi applicata curuae, y , evanescit.

§. 33. Formula, quam pro maxima columnae altitudine inuenimus, scilicet: $b = 3 c \sqrt[3]{\frac{\Gamma}{c}}$, ob summam simplicitatem maxima attentione est digna. Quanquam enim ex casu columnae determinatae, cuius altitudo est $= c$, pondus vero $= C$, est deriuata: tamen facile generalis reddi atque ad omnes plane columnas cylindricas, ex eadem materia confectas, extendi potest. Posita enim istius columnae amplitudine $= b b$, erit primo $C = b b c$; tum vero onus Γ , quod haec sustentare valet, constat esse proportionale quadrato amplitudinis, diuiso per quadratum altitudinis, ita vt fit $\Gamma = \frac{b^4}{c c}$, quibus valoribus substitutis erit altitudo nostra maxima $b = 3 \sqrt[3]{b b}$, vnde sequens constituitur.

Theorema maxime memorabile.

§. 34. *Maxima altitudo, qua columnae cylindricae, ex eadem materia confectae, proprium pondus etiamnunc sustinere valent, tenet rationem subtriplicatam amplitudinis.* Ita si duae huiusmodi habeantur columnae, quarum diameter, prioris sit D , posterioris vero d , altitudines maximae, quibus proprium pondus adhuc sustentare valent, erunt vt $\sqrt[3]{D D} : \sqrt[3]{d d}$.

DE ALTITVDINE COLVMNARUM SVB PROPRIO PONDERE CORRVNTIVM.

Auctore
L. EVLERO.

§. I.

Cum nuper hanc quaestionem resolvere essem conatus Tab IV. pro curua, ad quam columnam ante inflecti conce- Fig. 1. pi, quam frangeretur. inter abscissam verticalem $AX = x$ et applicatam horizontalem $XY = y$, hanc inueneram aequationem $\int x dy + \frac{Eddy}{dx^2} = 0$; vbi littera E momentum elasticitatis, quo columna inflexioni resistit, complectitur, vnde valor ipsius y per sequentem seriem infinitam exprimebatur:

$$\frac{y}{A} = x - \frac{1. x^4}{2.3.4. E} + \frac{1.4. x^7}{2. \dots 7 E^2} - \frac{1.4.7. x^{10}}{2. \dots 10 E^3} + \text{etc.}$$

Hinc porro per constructionem nata est linea curua figurae prorsus mirabilis, innumerabiles applicatas, tam maximas quam minimas, continens, quae autem omnes ad eandem partem axis verticalis sitae videbantur, ita vt ista curua non nisi in infinitum continuata in ipsum axem incideret; quae circumstantia me seduxerat quasi, vt arbitrarer, columnarum altitudinem adeo sine periculo fractionis in infinitum augere posse. Postmodum vero ex aliis princi-

piis clarissime ostendi, rem aliter se habere, et pro quovis columnarum robore certam altitudinem assignari posse, quam si superent, certe proprio ponderi succumberent.

§. 2. Cum autem aequatio ex certissimis principiis aequilibrî sit deducta, nullius erroris coargui potest, si modo omnes rationes, quibus innititur, probe perpenduntur, nullaeque circumstantiae immisceantur ipsis principiis huius calculi contrariae; quâobrem, antequam hinc conclusiones deducere liceat, omnia momenta, ex quibus ista singularis figura est deducta, accurate evoluerè oportet. Ac primo quidem supremus columnae terminus A nulli prorsus actioni cuiusquam vis subiectus est assumptus, ita ut liberrime de suo loco moveri et reliquis viribus cedere posset, quae circumstantia iam a statu, quem in nostra quaestione contemplamur, prorsus discrepat. Quando enim quaerimus, in quanta altitudine columnae etiamnunc proprium pondus sustinere valeant, manifesto supponimus, supremum terminum A, perinde ac infimum B, constanter in eadem recta verticali AB retineri, neque ab actione virium, quibus pars media incuruatur, de hoc situ dimoveri posse. Sin autem ista circumstantia praetermitteretur et supremo termino A plena libertas relinqueretur, nihil prorsus absurdi in illa curva mirabili deprehenderetur, sed potius semper eiusmodi casus assignari poterunt, quae cum ista curva pulcherrime conueniant, id quod paucis ostendere operae erit pretium.

§. 3. Ante omnia autem hic loco columnarum laminas elasticas eiusdem roboris, mente saltem, substitui

tui conueniet: semper enim concipi potest lamina elastica, quae inflexioni tantum reluctetur, quantum columna fractioni resistit; totum autem discrimen in eo erit positum, quod lamina elastica a viribus sollicitantibus reuera incurvetur, dum columna, ab iisdem viribus sollicitata, disrumpitur. Hoc praemonito semper eiusmodi lamina elastica concipi poterit, quae, a solo suo pondere sollicitata, ad eam ipsam curuam inflecti atque adeo in aequilibrio consistere queat, quam ex aequatione initio allata deduximus; si modo obseruemus, in calculo illo omnes huius curuae applicatas XY tanquam infinite paruas spectari debere, etiamsi in nostra figura multo maiores sint repraesentatae, quo variae inflexiones facilius perspicui possent. Abscissae autem huius curuae ad eo maiorem altitudinem assurgent, quo fortiores fuerint laminae nostrae elasticae: applicatae vero, singulis abscissis respondentes, perpetuo eandem inter se rationem tenere sunt censendae.

§. 4. His notatis quaelibet portio huius curuae, veluti AY , statum aequilibrum cuiuspiam laminae elasticae repraesentabit: scilicet semper assignari poterit lamina elastica longitudinis AY , quae, si in Y secundum directionem suam firmiter retineatur, atque ad figuram YA inflectatur, ob solum proprium pondus in hoc statu se conseruare possit, hocque modo punctum Y , vbicunque libuerit, accipere licet. Hic primum occurrunt ea puncta curuae, quibus applicatae sunt vel maximae vel minimae, vbi ergo tangentes sunt verticales. Quod si ergo quodpiam horum punctorum pro infimo termino laminae elasticae accipiat, is pauimento quoque verticaliter infigi debebit, ut de hoc situ declinare nequeat; tum enim pars superior

Tab. IV.
Fig. 2.

figuram assignatam ob proprium pondus recipere simulque in aequilibrio consistere poterit.

§. 5. Praeterea vero in hac curua infinita dabuntur puncta, quae littera O designauimus, ubi datur punctum flexus contrarii, atque adeo curuatura prorsus euanesceat; unde si infimus laminae elasticae terminus in tali puncto accipiatur, non opus est, ut pavimento infigatur secundum suam directionem, sed sufficiet ut simpliciter insistat, et talis lamina ob proprium pondus figuram exhibitam recipere et in aequilibrio consistere poterit. Veluti si inferior laminae terminus in puncto O' capiatur, isque simpliciter pavimento EF insistat, tum ob solum proprium pondus lamina inflecti poterit secundum curuam O' N G M A, hocque statu in aequilibrio persistere, propterea quod totius huius laminae centrum grauitatis G perpendiculariter puncto O' imminebit; euidens autem est, hunc statum aequilibrum esse labilem, et laminam minima vi esse prolapsuram.

Tab. IV.
Fig. 3.

§. 6. Hinc iam clarissime intelligimus, nullum horum casuum ad quaestionem propositam accommodari posse, quippe qua eiusmodi columna consideratur, cuius vterque terminus perpetuo in eadem recta verticali firmiter retineatur, dum in omnibus his casibus supremo termino A plena libertas conceditur; quamobrem, ut nostram quaestionem rite euoluamus, statum columnae, siue laminae elasticae, initialem aliter constituere debemus atque ante fecimus, scilicet praeter sollicitationes a grauitate oriundas supremo termino A certam quandam vim horizontalem applicatam concipere debemus, qua illud punctum A perpetuo in eadem recta verticali contineatur. Facile autem intelli-

telligitur, magnitudinem huius vis prius definiri non posse, quam totus calculus ad finem fuerit perductus; quandoquidem tum demum patebit, quanta vi opus sit, ad supremum terminum A in debito situ conseruandum. Quo autem haec noua inuestigatio clarius perspicui queat, ipsi quaestioni principali maiorem extensionem tribuamus eamque sequenti modo constituamus.

Status Quaestionis.

§. 6. Proposita sit columna cylindrica, in situ verticali A B constituta, siue eius loco lamina elastica eiusdem roboris, cuius autem ambo termini A et B perpetuo in hoc situ ita retineantur, vt ab aliis viribus sollicitantibus inde nequitiam dimoueri queant. Huic iam laminae elasticae circa medium C quandam vim horizontalem C c applicatam concipiamus, qua laminae figura incuruata A B C tribuatur, quam mutationem autem tam exiguam esse statuamus, vt tota curua quasi infinite parum a recta verticali A B discrepet. Hoc posito quaeramus naturam huius curuae A C B, ad quam, tam ab ista vi, quam a proprio pondere inflectetur; hac enim quaestione resoluta facile patebit, vtrum, si vis sollicitans C c euanesceret, talis inflexio certo casu nihilominus locum habere queat; hoc enim ipso continebitur casus, quo columna a solo proprio pondere prostreretur, quandoquidem ne minimam quidem curuaturam pati potest.

Tab. IV.
Fig. 4

§. 7. Quoniam vero haec quaestio non solum summam circumspectionem postulat, sed etiam plurimis difficultatibus est inuoluta, laborem nostrum ab euolutione casus simplicissimi inchoemus, quo columnae omnis flexibili-

bilitas adimatur, eiusque loco in medio C eiusmodi iunctura tribuatur, quae cum certo elasticitatis momento flexurae

Tab. IV. resistat. Referat igitur recta verticalis A B talem columnam, cuius ambo termini A et B de suo loco amoveri nequeant; tum vero isti columnae in medio applicata sit vis horizontalis C c, qua haec columna in statum inflexum A C B fit perducta, atque tam ex pondere columnae quam vi applicata C c, ad momentum flexurae relata, quaeri debet status iste inflexus, siue anguli deflexionis a situ verticali C A O et C B O, qui quidem inter se erunt aequales, quia partes A C et B C aequales supponuntur.

§. 8. Vt nunc solutionem huius casus ordine instituamus, primo omnes vires consideremus, quibus haec columna actu sollicitatur. Hic igitur occurrit pondus, quo utrumque brachium C A et C B deorsum vrgetur. Posita igitur longitudine utriusque C A et C B = a vocetur pondus siue massa utriusque = M, quae vis in utriusque centro gravitatis seu medio applicata concipi potest; tum vero etiam actu sollicitatur a vi illa horizontali C c, quam vocemus = C. Praeterea vero, quatenus ambo brachia iam ad angulum A C e sunt inflexa, loco vis elasticae mente substituamus elastrum E e, quod vi sua contractiva conetur ambo brachia in directum extendere. Quod si ergo vocemus angulum C A B = C B A = θ , erit angulus E C e = 2θ , cui proportionalis statui potest vis elastri, siquidem hunc angulum tanquam minimum speciemus. Hinc ergo, si vim elasticam absolutam littera E et intervallum C E = C e littera e designemus, momentum huius elastri erit $2 E e \theta$; unde simul patet, si horizontalis C O ducatur, fore C O = $a \sin. \theta$ et A O = B O = $a \cos. \theta$, sicque, quia angu-

angulus θ tanquam minimus spectatur, statuere poterimus: $C.O = a \theta$ et $A.O = B.O = a$.

§. 9. His autem viribus praeterea adiungi debent eae vires, quae requiruntur, ad columnam in statu, quem supponimus, retinendam. Primo, igitur, quoniam terminus A perpetuo in recta verticali AB retineri debet, ibi applicemus vim horizontalem Aa , quae sit $= A$, acius vasculor. autem nondum est cognitus, quandoquidem praecise tanta esse debet, ut punctum A in suo loco conservetur. Deinde quia terminus inferior B fundocita insistere assumitur, ut etiam de suo loco dimoueri nequeat, primo ipsum fundum sustinebit totum columnae pondus, unde ipsum punctum B sursum virgeri censendum est vi $B.O = 2M$; dein vero, ne de suo loco, siue dextrorsum siue sinistrorsum, dimoueatur, illi vim horizontalem $Bb = B$ applicatam concipiamus, quae etiam inter incognita est referenda. Tota autem columna siue pondere ita aget, quasi eius pondus in communi centro gravitatis G utriusque brachii esset applicatum, quod quia in medium intervalli $C.O$ cadit, erit $O.G = \frac{1}{2} a \theta$, cuius ergo directio erit recta verticalis GO .

§. 10. Cum nunc totum hoc systema in aequilibrio consistere assumamus, primo omnes vires, ratione quantitatis, se mutuo destruere debent, unde pro viribus horizontalibus habebimus hanc aequationem: $A + B = C$; unde, simulac altera harum virium A et B fuerit cognita, etiam altera inpotescet. Tum vero vires verticaliter agentes iam sibi contrariae sunt constitutae; tertio vero vires elastri, in puncta E et e agentis, se mutuo perfecte destrunt.

unt. Praeterea autem ad aequilibrium requiritur, vt momenta omnium harum virium, respectu cuiuscunque axis, se mutuo destruant: constat enim, si hoc eueniat pro quolibet axe, id simul pro omnibus aliis locum habere. Consideremus igitur momenta harum virium respectu puncti A, vbi ergo vis $Aa = A$ et vis $BO = 2M$ momenta evanescent, quia directiones per ipsum punctum A transeunt; at vis horizontalis $Bb = B$ dabit momentum sinistrorsum vergens $= 2aB$, vis vero horizontalis $Cc = C$ dabit momentum dextrorsum vergens $= Ca$; vis denique verticalis Gg gignit momentum sinistrorsum, quod erit $Ma\theta$; vnde nanciscimur hanc aequationem: $2aB + Ma\theta = Ca$. Quoniam igitur iam ante inuenimus $A + B = C$, nunc vtramque seorsim determinare valemus: reperimus enim

$$A = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}Ma\theta \text{ et } B = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}Ma\theta.$$

§. 11. His iam viribus determinatis ipsam resolutionem huius casus aggrediamur, quem in finem nostrum systema in puncto C fixum concipiamus, cuius ergo respectu vires, quae brachium CA seorsim sollicitant, se mutuo in aequilibrio servare debent; tum enim vires, alterum brachium sollicitantes, se quoque sponte in aequilibrio continebunt. At vero brachium CA primo sollicitatur a vi $Aa = A$, cuius momentum est Aa , sinistrorsum tendens; in eandem vero etiam plagam tendet momentum, ex proprio pondere huius brachii ortum, quod est $\frac{1}{2}Ma\theta$. In contrariam autem plagam hoc brachium ab elastio abripitur, cuius momentum est $2Ee\theta$, ideoque habebimus hanc aequationem: $Aa + \frac{1}{2}Ma\theta = 2Ee\theta$, quae, si loco A valor inuentus substituatur, dabit $\frac{1}{2}aC + Ma\theta = 2Ee\theta$, in qua aequatione tota solutio nostri problematis continetur.

tur. Eadem autem aequatio etiam obtinetur ex consideratione alterius brachii. Primo enim hoc brachium vrgetur a vi $Bb = B$, cuius momentum, sinistrorsum tendens, est Ba ; deinde ex vi $BO = 2M$, siue reactione fundi, oritur momentum in eandem plagam vergens $= 2Ma\theta$; tum vero hoc brachium ob proprium pondus praebet momentum dextrorsum vergens $= \frac{1}{2}Ma\theta$; denique vero ab elastro in e applicato oritur momentum etiam dextrorsum tendens $= 2Ee\theta$; sicque hinc orietur ista aequatio:

$$Ba + 2Ma\theta = \frac{1}{2}Ma\theta + 2Ee\theta,$$

in qua si loco B suus scribatur valor, proueniet haec aequatio: $\frac{1}{2}Ca + Ma\theta = 2Ee\theta$.

§. 12. Cum igitur tota solutio casus propositi in hac aequatione contineatur: $2Ee\theta = \frac{1}{2}Ca + Ma\theta$, hinc statim angulus θ definiri potest, ad quem nostra columna a proposita vi horizontali Ce deflecti poterit: erit enim $\theta = \frac{Ca}{4Ee - 2Ma}$; vbi manifestum est, hunc casum locum habere non posse, nisi vis elastica, in formula Ee contenta, multo maior fuerit quam Ma , quandoquidem hic supponimus, angulum θ valde esse exiguum. Hinc autem vicissim assignare poterimus vim horizontalem $Ce = C$, quae valeat nostram columnam ad datum angulum $BAC = \theta$ deflectere: erit enim ista vis $C = \frac{2\theta}{a}(2Ee - Ma)$. Hinc statim patet, dari eiusmodi casus, quibus talis deflexio nullam vim horizontalem postulat, atque adeo columna a proprio pondere ad hanc deflexionem vrgebitur; et quoniam angulus θ hic non determinatur, ista columna a solo pondere continuo maiorem deflexionem recipiet, atque adeo penitus corruet. Hoc nempe toties eveniet, quoties fuerit.

$M a = 2 E e$, qui est ipse ille casus, quem hic evolueri nobis proposuimus.

§. 13. Hunc igitur casum diligentius perpendamus, ac primo quidem ponamus, totam huius columnae altitudinem esse $A B = b$, ita ut sit $a = b$; tum vero sit amplitudo huius columnae $= d d$; atque hinc sumi poterit $M = \frac{1}{2} d d b$, quia M denotabat dimidia columnae pondus. Hinc ergo postrema aequatio dabit $\frac{1}{2} b b d d = 2 E e$, unde altitudo huius columnae ita determinabitur, ut sit $b = \sqrt{\frac{8 E e}{d d}}$. Quoties ergo talis columna, qualem hic assumimus, quae scilicet nullam inflexionem recipere queat, praeterquam in suo medio, ubi momentum inflexioni resistens sit $E e$, tantam habeat altitudinem, vel maiorem, tum certe proprium suum pondus sustinere non valebit, sed penitus prosterne-
tur; unde iam nouum argumentum habemus contra opinio-
nem supra memoratam, qua arbitratus sum, nullam colum-
nam sub proprio pondere occumbere posse. Hoc igitur
casu expedito multo facilius resolutionem quaestionis §. 6.
et seqq. descriptae fuscipere poterimus.

Resolutio Quaestionis.

§. 14. Quoniam, si huic columnae vnica vis hori-
zontalis in medio applicaretur, tota columna non in
curuam continuam defleceretur, totam istam vim hori-
zontalem aequaliter per totam columnae altitudinem, quae
sit $A B = b$, distribuamus, ita ut, si tota illa vis hori-
zontalis fuerit $= C$, elemento cuicunque $X x = d x$ applicari
debeat, vis horizontalis elementaris $= \frac{C d x}{b}$. Tales igitur vi-
res horizontales singulis columnae elementis applicatae
concepiantur. Deinde etiam singula elementa ob proprium
pon-

Tab. IV.
Fig. 6.

pondus deorsum sollicitabuntur, viribus $\frac{M dx}{b}$, siquidem M denotet pondus totius columnae; sicque iam habemus omnes vires, quibus haec columna actu sollicitatur; siquidem iis adiungamus momentum elasticitatis, quo haec columna in singulis punctis pollere statuitur, quod, ut haecenus fecimus, per formulam $E k$ repraesentemus.

§. 15. Praeterea vero, quoniam supremus columnae terminus A perpetuo in ea recta verticali retineri debet, ei horizontaliter applicatam concipiamus vim $Aa = A$; tum vero termino inferiori B , ob eandem rationem, applicemus vim horizontalem $Bb = B$. Porro vero iste terminus inferior, ob pondus columnae, verticaliter sursum urgeri censendus est vi M ; insuper autem in calculum introduci debet centrum grauitatis columnae incuruatae, quod si ponamus cadere in punctum G , eius distantia ab axe reperiatur $GO = \frac{\int y dx}{b}$. Posita enim abscissa $AX = x$ et applicata $XY = y$, ob inflexionem infinite paruam, elementum Yy ipsi elemento abscissae Xx aequale censei potest. Cum igitur eius pondus sit $\frac{M dx}{b}$, eius momentum, respectu axis AB , erit $\frac{M y dx}{b}$, cuius integrale, per totam columnam extensum, erit $\frac{M}{b} \int y dx$, cui ergo aequale esse debet momentum totius columnae, si eius pondus in puncto G esset collectum, quod ergo erit $M \cdot GO$; vnde manifesto sequitur interuallum $GO = \frac{1}{b} \int y dx$, pro quo, ergo interuallo inueniendo area totius curuae AYB inuestigari debet, sicque in hoc puncto G vis applicata est concipienda horizontalis $Gg = M$.

§. 16. Quoniam nunc primo omnes istae vires ratione quantitatis se inuicem destruere debent, pro viribus horizontalibus hanc nanciscimur aequationem: $A + B = C$; vires autem verticales iam se sponte destruunt, cum sit vis $BO = M$ et vis $Gg = M$. Praeterea vero necessesse est, ut omnium harum virium momenta respectu puncti A se destruant: ubi ergo virium Aa et BO momenta per se sunt nulla, vis autem Bb momentum sinistrorsum vergens erit Bb, atque in eundem sensum verget momentum, ex vi seu pondere columnae $Gg = M$, ortum, quod ergo momentum, ob $GO = \frac{\int y dx}{b}$, erit $\frac{M}{b} \int y dx$, hoc scilicet integrali per totam columnam extenso. Ne autem haec conditio calculum turbet, vocemus hoc intervallum $GO = g$, ita ut sit $g = \frac{\int y dx}{b}$ et momentum hinc natum erit $= Mg$. Superest igitur, ut omnia momenta ex omnibus viribus horizontalibus $YV = \frac{C dx}{b}$ nata, colligantur; quare, cum ex ista vi YV nascatur momentum $\frac{C x dx}{b}$, summa omnium horum momentorum per totam altitudinem erit $\frac{1}{2} C b$, quod dextrorsum vergit, ita ut hinc obtineamus hanc aequationem: $Bb + Mg = \frac{1}{2} C b$, ex qua aequatione statim colligimus $B = \frac{1}{2} C - \frac{Mg}{b}$, hincque porro alteram vim incognitam $A = \frac{1}{2} C + \frac{Mg}{b}$.

§. 17. Nunc iam totam columnam, quasi in puncto Y esset fixa, contemplemur, atque ex omnibus viribus, arcum AY sollicitantibus, earum momenta inuestigemus respectu huius puncti Y, quippe quorum summa aequalis esse debet momento elasticitatis, quod quoniam a curvatura in hoc loco pendet, si radium osculi in hoc loco statuamus $= r$, ipsum elasticitatis momentum erit $\frac{Ekk}{r}$; praeterea

terea vero momentum vis $A a = A$, respectu huius puncti Y , est $A x$. Momenta autem, quae tam ex viribus horizontalibus quam verticalibus toti arcui $A Y$ sunt applicatae, seorsim inuestigari debent.

§. 18. Cum igitur hic punctum Y tanquam Tab. IV.
Fig. 7.
sum spectetur, arcum $A Y$ secundum maiorem scalam hic seorsim repraesentemus, ita ut sit $A X = x$ et $X Y = y$, quas quantitates ergo tantisper quasi constantes spectari licet; tum autem consideretur huius arcus elementum quodcunque $U u$, per coordinates $A T = t$ et $T U = u$ determinatum, quae hic solae ut variables sunt tractandae. Cum igitur, ob deflexionem minimam, sit ut supra elementum $U u = T t = d t$, ei primo applicata erit vis horizontalis $U P = \frac{C d t}{b}$; praeterea vero eidem applicata est vis verticalis $U Q = \frac{M d t}{b}$. Illius igitur vis $U P = \frac{C d t}{b}$ momentum, respectu puncti Y , erit $\frac{C (x-t) d t}{b}$, cuius ergo integrale erit $\frac{C t}{b} (x - \frac{1}{2} t)$, quod summa horum momentorum per arcum $A U$ continet. Promoveatur nunc punctum U usque in Y , atque summa omnium horum momentorum, ex arcu $A Y$ natorum, erit $\frac{1}{2} \frac{C x x}{b}$, cuius effectus dextrorsum tendit.

§. 19. At vero pro viribus verticalibus, vis $U Q = \frac{M d t}{b}$ momentum respectu puncti Y erit

$$\frac{M d t}{b} Q Y = \frac{M (y-u) d t}{b},$$

quod sinistrorsum tendit, prorsus ut momentum vis $A a = A$. Integretur iam ista formula, ut obtineatur momentum ex ar-

cu A U oriundum, quod erit $\frac{M}{b}(yt - \int u dt)$. Promoveatur punctum u vsque in y , faciendo $t = x$ et $u = y$, atque totum momentum, ex arcu A Y ortum, erit $\frac{M}{b}(xy - \int y dx)$, quae formula manifesto reducitur ad hanc: $\frac{M}{b} \int x dy$.

§. 20. Inventis igitur his tribus momentis, quorum primum A x sinistrorsum, secundum $\frac{1}{2} \frac{Cxx}{b}$ dextrorsum, tertium vero modo inuentum, $\frac{M}{b} \int x dy$, iterum sinistrorsum agit, totum momentum sinistrorsum virgens erit $Ax + \frac{M}{b} \int x dy - \frac{Cxx}{2b}$, cui ergo aequale esse debet momentum elasticitatis $\frac{Ekk}{r}$, quippe quod dextrorsum vergit, vnde adipiscimur hanc aequationem:

$$Ax + \frac{M}{b} \int x dy - \frac{Cxx}{2b} = \frac{Ekk}{r},$$

quae, si loco A valorem ante inuentum substituamus, induet hanc formam:

$$\frac{1}{2} Cx - \frac{Cxx}{2b} + \frac{Mgx}{b} + \frac{M}{b} \int x dy = \frac{Ekk}{r}.$$

In hac ergo aequatione omnia continentur, quae circa solutionem problematis propositi desiderari possunt.

§. 21. Quoniam autem radius osculi etiamnunc in hac aequatione reperitur, propter applicatas y vt infinite paruas spectandas statui poterit $r = -\frac{dx^2}{d^2y}$, si quidem elementum dx pro constante accipiatur. Hinc ergo nostra aequatio erit:

$$\left(\frac{1}{2} C + \frac{Mg}{b}\right)x - \frac{Cxx}{2b} + \frac{M}{b} \int x dy + \frac{Ekk d^2y}{a x^2} = 0,$$

quae per $\frac{M}{b}$ diuisa euadit:

$$\left(\frac{Cb}{2M} + g\right)x - \frac{Cxx}{2M} + \int x dy + \frac{Ebk d^2y}{M a x^2} = 0,$$

vbi

vbi notetur, fractionem $\frac{M}{b}$ amplitudinem columnae exprimere, neque adeo ab altitudine columnae b pendere. Si enim amplitudo columnae ponatur $= b b$, statui poterit $M = b b b$; quo observato aequatio nostra hanc induet formam:

$$\left(\frac{c}{2bb} + g\right) x - \frac{c x x}{2 b b b} + \int x dy + \frac{E k k d d y}{b b . d x^2}.$$

Deinde etiam initio ostendimus, formulam $E k k$ quadrato amplitudinis, seu ipsi b^4 , esse proportionalem, vnde statuere poterimus, $E k k = b^4 e$, vbi e est linea, vi elasticae absolute proportionalis. Hoc igitur valore introducto aequatio sequentem induet formam:

$$\left(\frac{c}{2bb} + g\right) x - \frac{c x x}{2 b b b} + \int x dy + e b b . \frac{d d y}{d x^2} = 0,$$

vnde ergo per geminam integrationem valor applicatae y , per abscissam x expressus, erui debet, quod aliter nisi per series infinitas praestari nequit.

§. 22. Vt autem istae integrationes rite ad statum quaestionis accommodentur, sequentia praecepta sunt tenenda:

1°. Formulae $\int x dy$ integrale ita capi debet, vt evanescat posito $x = 0$.

2°. Quia curva necessario per ipsum punctum A transit, altera aequationis nostrae integratio ita debet determinari, vt posito $x = 0$ fiat quoque $y = 0$.

3°. Altera vero integratio pro abscissis minimis dare debet talem aequationem: $y = \alpha x$; vbi ergo ista constans α designat tangentem anguli, quem curva cum axe in A constituit, vel adeo ipsum hunc angulum, siqui-

dem vt infinite paruus est spectandus. Hic autem imprimis est obseruandum, istum angulum α effectum totum exhibere, quem vis horizontalis C , columnae applicata, producere valet. Hoc igitur modo series infinita reperiri poterit, quae pro qualibet abscissa x quantitatem applicatae y determinabit.

§. 23. Integratione autem hac lege instituta eam conditionem principalem adimpleri oportet, quae postulat, vt, posita abscissa $x = b$, applicata y denuo euanescat. Hoc igitur modo obtinebitur aequatio, meras quantitates constantes inuoluens; eas scilicet, quae in aequatione differentiali continentur, ac praeterea angulum deflexionis α . Hinc autem ipsam hanc deflexionem α , quatenus a vi horizontali C producitur, nondum definire licet, quoniam in hac aequatione adhuc inest quantitas g , interuallum GO exprimens, cuius valor nunc demum per integrationem, ex aequatione inter x et y inuenta, definiri debet. Vidimus enim esse $g = \frac{\int y dx}{b}$, postquam scilicet integrale $\int y dx$ a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = b$ fuerit extensum.

§. 24. Postquam igitur aequatio inter x et y fuerit inuenta, ex ea per integrationem euoluatur formula $\int y dx$, quae, per totam altitudinem extensi, praebebit valorem producti gb ; sicque denuo hinc colligitur aequatio inter easdem quantitates constantes, quae ergo si cum superiore aequatione combinetur, inde quantitas g eliminari poterit, quo facto habebitur noua aequatio, ex qua pro quauis vi horizontali C definiri poterit angulus deflexionis

xionis α , quandoquidem reliquae quantitates in aequatione contentae omnes tanquam datae spectari possunt.

§. 25. Ex hac autem vltima aequatione, vnde valorem ipsius α elici oportet, simul patebit, eiusmodi dari casus, quibus eadem deflexio α oriri potest, etiam si vis horizontalis C prorsus euanescat; atque hinc orietur casus, quem hic praecipue examinare constituimus, quo scilicet in eam columnae altitudinem inquirimus, quam si columna attigerit, ob proprium pondus incuruari incipiat, atque adeo frangatur, quare ad hunc casum analysin superiorem accommodabimus.

Inuestigatio maximae altitudinis, qua columna adhuc proprium suum pondus sustinere valet.

§. 26. Pro hoc ergo casu statim ponamus vim horizontaliter applicatam $C = 0$, et iam aequatio nostra differentio-differentialis erit:

$$g x + \int x d y + e b b, \frac{d d y}{d x^2} = 0,$$

in qua loco $e b b$ br. gr. scribamus litteram m , pro cuius integrali si fingamus seriem

$$y = \alpha x + \beta x x + \gamma x^3 + \delta x^4 \text{ etc.}$$

mox patebit, fore $\beta = 0$, simulque omnes potestates sequentes ipsius x , quarum exponentes sunt formae $3n + 2$; tum vero potestatum, quarum exponentes sunt formae $3n + 1$, coefficientes tantum per litteram α determinari; at vero potestatum, quarum exponentes sunt formae $3n$, coefficientes per solam litteram g definiri.

§. 27. Hinc ergo statim valorem ipsius y in duas partes diuellere poterimus, quae sint $y = \alpha p + g q$; hoc autem valore introducto aequatio nostra erit

$g x + \alpha \int x dp + g \int x dq + m \alpha \cdot \frac{d p}{d x^2} \cdot m g \cdot \frac{d q}{d x^2} = 0.$
vnde hae duae aequationes deriuantur :

$$\text{I. } \int x dp + m \frac{d p}{d x^2} = 0.$$

$$\text{II. } x + \int x dq + m \frac{d q}{d x^2} = 0.$$

Pro priore, quoniam nouimus, primum terminum ipsius p esse x , statuamus $p = x - A x^4 + B x^7 + C x^{10} + \text{etc.}$ factaque substitutione perueniemus ad sequentem aequationem :

$$0 = \begin{cases} \frac{m d p}{d x^2} = -4.3 m A x^3 + 7.6 m B x^5 - 10.9 m C x^8 + 13.12 m D x^{11} \text{ etc.} \\ \int x dp = \frac{1}{2} x^2 - \frac{4}{5} A x^5 + \frac{7}{8} B x^8 - \frac{10}{11} C x^{11} + \text{etc.} \end{cases}$$

vnde ergo coefficients assumti sequenti modo determinantur :

$$A = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m}; \quad B = \frac{4 A}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot m} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7 m^2},$$

$$C = \frac{7 B}{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot m} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10 m^3}$$

$$D = \frac{10 C}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot m} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 13 m^4}, \text{ etc.}$$

Pro valore ipsius q , ex altera aequatione eruendo, fingamus $q = -\mathcal{A} x^2 + \mathcal{B} x^5 - \mathcal{C} x^8 + \mathcal{D} x^{11} - \text{etc.}$ et facta substitutione perueniemus ad hanc aequationem :

$$\left. \begin{aligned} \frac{m d q}{d x^2} &= -3.2 m \mathcal{A} x + 6.5 m \mathcal{B} x^4 - 9.8 m \mathcal{C} x^7 + 12.11 m \mathcal{D} x^{10} - \text{etc.} \\ \int x dq &= -\frac{3}{4} \mathcal{A} x^4 + \frac{6}{7} \mathcal{B} x^7 - \frac{9}{10} \mathcal{C} x^{10} + \text{etc.} \\ + x &= + 1 \cdot x \end{aligned} \right\} = 0$$

vnde ergo coefficients assumti sequenti modo determinabuntur :

$$\mathcal{A} =$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot m}; \mathcal{B} = \frac{3 \mathcal{A}}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot m} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 6 m^2}; \mathcal{C} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 m^3};$$

$$\mathcal{D} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 12 m^4}; \text{ etc.}$$

§. 28. Pro his igitur litteris p et q , habebimus istas series infinitas:

$$p = x - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot m} + \frac{1 \cdot 4 \cdot x^7}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7 \cdot m^2} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot x^{10}}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10 m^3} + \text{etc.}$$

$$q = -\frac{x^3}{2 \cdot 3 m} + \frac{1 \cdot 3 x^6}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 6 m^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot x^9}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 m^3} + \text{etc.}$$

quibus serierum indentis erit $y = \alpha p + g q$. Statuamus $x = b$, et quia fieri debet $y = 0$, habebimus hanc primam aequationem pro solutione nostri problematis: $\alpha p + g q = 0$. At vero pro valore literae g eruendo, cum fit $g b = \int y dx = \alpha \int p dx + g \int q dx$, his integralibus ab $x = 0$ ad $x = b$ extensis, habebimus primo

$$\int p dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 5 m} + \frac{1 \cdot 4 \cdot x^8}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8 m^2} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot x^{11}}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 m^3} + \text{etc. et}$$

$$\int q dx = -\frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 m} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^7}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 7 m^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot x^{10}}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10 m^3} + \text{etc.}$$

vbi ergo, postquam posuerimus $x = b$, oriri debet haec aequatio: $g b = \alpha \int p dx + g \int q dx$, unde deducimus

$$g = \frac{\alpha \int p dx}{b - \int q dx},$$

qui valor in superiore aequatione $\alpha p + g q = 0$ substitutus praebet

$$p + \frac{q \int p dx}{b - \int q dx} = 0,$$

sive $b p - p \int q dx + q \int p dx = 0$, quae aequatio duas tantum quantitates b et m inuoluit, ex qua ergo valorem ipsius b eruere licebit, hicque valor ipsam illam maximam altitudinem columnae declarabit, in qua se tantum non sustinere valebit.

§. 29. Quo nunc has formulas propius ad calculum accommodemus, ponamus $\frac{x^3}{m} = \frac{b^3}{m} = t$, atque series, quibus indigemus, sequenti modo designemus, posito scilicet vbique $x = b$:

$$p = b \left(1 - \frac{1 \cdot t}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 7} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 10} + \text{etc.} \right) = b \cdot P$$

$$q = -1 \left(\frac{t}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 9} - \text{etc.} \right) = -1 \cdot Q$$

$$f p d x = b^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{t}{2 \cdot \dots \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 8} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 11} + \text{etc.} \right) = -b^2 \cdot P'$$

$$f q d x = -b \left(\frac{t}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 10} - \text{etc.} \right) = -b \cdot Q'$$

Quod si iam istos novos valores introducamus, postrema nostra aequatio sequentem induet formam:

$$b b P + b b P Q' - b b Q P' = 0,$$

at per $b b$ diuisa fit $P + P Q' - Q P' = 0$, quae aequatio nullam aliam literam inuoluit nisi t , vnde ergo si definire licuerit hanc quantitatem t , erit $b = \sqrt[3]{m t}$, hoc est $t = \sqrt[3]{b b e t} =$ altitudini columnae quaesitae; vbi valor t est numerus quidam absolutus, ex illa aequatione eruendus. Quare cum e pro eadem materia, ex qua columnae conficiuntur, eundum retineat valorem, pro variis anplitudinibus columnarum maximae altitudines quaesitae sequuntur rationem subtriplicatam altitudinum, id quod egregie conuenit cum theoremate dissertationi praecedenti annexo.

§. 30. Vt igitur ista altitudo b per calculum definiri possit, sequentes quatuor series, quantitatem incognitam t inuoluentes, rite euolui debebunt:

$$P = 1 - \frac{1 \cdot t}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 7} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 10} + \text{etc.}$$

$$P' = \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot t}{2 \cdot \dots \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 8} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 11} + \text{etc.}$$

$$Q =$$

$$Q = \frac{1 \cdot t}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 9} - \text{etc.}$$

$$Q' = \frac{1 \cdot t}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot t^2}{2 \cdot \dots \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot t^3}{2 \cdot \dots \cdot 10} - \text{etc.}$$

atque nunc totum negotium huc redit, vt ille valor ipsius t inuestigetur, quo huic aequationi satisfiat: $P + P Q' - Q P' = 0$, id quod aliter nisi tentando fieri nequit: plures scilicet pro t assumi conueniet successiue valores, atque ex erroribus singulorum concludi poterit verus valor ipsius t . Mox autem inuestiganti patebit, valorem ipsius t non exiguum esse, sed potius satis magnum accipi debere.

§. 31. Postquam autem hinc verus valor numeri t fuerit erutus, vt inde statim quaesitam altitudinem h in mensura penitus cognita assignare valeamus, ponamus haberi columnam cylindricam, ex eadem materia paratam, cuius altitudo sit $= a$, amplitudo vero $= d d$, et quae per experimenta comperta sit gestare posse onus Γ , quod se habeat ad pondus huius columnae, vt $\lambda : 1$, ita vt sit $\Gamma = \lambda a d d$. Iam ex iis, quae de vi columnarum iam olim sunt tradita, istud onus Γ inuentum est

$$\Gamma = \frac{\pi \cdot \pi \cdot E k k}{a a},$$

existente $E k k = d^e e$, vnde ergo fiet

$$e = \frac{\Gamma a a}{\pi \pi d^4} = \frac{\lambda a^3}{\pi \pi d}.$$

Substituatur ergo iste valor in formula nostra pro h inventa, ac reperietur

$$h = a \sqrt[3]{\frac{\lambda b b}{\pi \pi d d}}.$$

vbi iam omnia elementa penitus sunt cognita.

Calculus

Pro inuestigando valore numeri t .

§. 32. Quoniam hic quatuor series euolui debent, designemus terminos cuiusque seriei ordine per cyphas romanas I, II, III, IV, etc. atque pro seriebus P et P', in subsidium vocentur sequentes formulae:

Pro serie P	Pro serie P'
$lII = lI + lt \quad . \quad -1,3802112$	$II' = \frac{1}{5} II$
$lIII = lII + lt \quad . \quad -1,7201593$	$III' = \frac{1}{8} III$
$lIV = lIII + lt \quad . \quad -2,0122340$	$IV' = \frac{1}{11} IV$
$lV = lIV + lt \quad . \quad -2,2345173$	$V' = \frac{1}{14} V$
$lVI = lV + lt \quad . \quad -2,4123950$	$VI' = \frac{1}{17} VI$
$lVII = lVI + lt \quad . \quad -2,5603551$	$VII' = \frac{1}{20} VII$
$lVIII = lVII + lt \quad . \quad -2,6869185$	$VIII' = \frac{1}{23} VIII$
$lIX = lVIII + lt \quad . \quad -2,7974566$	$IX' = \frac{1}{26} IX$
$lX = lIX + lt \quad . \quad -2,8955551$	$X' = \frac{1}{29} X$
$lXI = lX + lt \quad . \quad -2,9837228$	$XI' = \frac{1}{32} XI$
$lXII = lXI + lt \quad . \quad -3,0637814$	$XII' = \frac{1}{35} XII$
$lXIII = lXII + lt \quad . \quad -3,1370931$	$XIII' = \frac{1}{38} XIII$
$lXIV = lXIII + lt \quad . \quad -3,2047065$	$XIV' = \frac{1}{41} XIV$
$lXV = lXIV + lt \quad . \quad -3,2674417$	$XV' = \frac{1}{44} XV$
$lXVI = lXV + lt \quad . \quad -3,3259545$	$XVI' = \frac{1}{47} XVI$
$lXVII = lXVI + lt \quad . \quad -3,3807774$	$XVII' = \frac{1}{50} XVII$
$lXVIII = lXVII + lt \quad . \quad -3,4323474$	$XVIII' = \frac{1}{53} XVIII$
$lXIX = lXVIII + lt \quad . \quad -3,4810291$	$XIX' = \frac{1}{56} XIX$
$lXX = lXIX + lt \quad . \quad -3,5271282$	$XX' = \frac{1}{59} XX$

§. 33. Simili modo pro computo serierum Q et Q' inferuiet sequentes formulae:

Pro serie Q	Pro serie Q'
$lI = . . . + lt - 0, 7781513$	$I' = \frac{1}{4} I$
$lII = lI . . . + lt - 1, 6020600$	$II' = \frac{1}{7} II$
$lIII = lII . . . + lt - 1, 9242793$	$III' = \frac{1}{10} III$
$lIV = lIII . . . + lt - 2, 1663314$	$IV' = \frac{1}{13} IV$
$lV = lIV . . . + lt - 2, 3569815$	$V' = \frac{1}{16} V$
$lVI = lV . . . + lt - 2, 5137501$	$VI' = \frac{1}{19} VI$
$lVII = lVI . . . + lt - 2, 6467304$	$VII' = \frac{1}{22} VII$
$lVIII = lVII . . . + lt - 2, 7621424$	$VIII' = \frac{1}{25} VIII$
$lIX = lVIII . . . + lt - 2, 8640659$	$IX' = \frac{1}{28} IX$
$lX = lIX . . . + lt - 2, 9553135$	$X' = \frac{1}{31} X$
$lXI = lX . . . + lt - 3, 0379043$	$XI' = \frac{1}{34} XI$
$lXII = lXI . . . + lt - 3, 1133355$	$XII' = \frac{1}{37} XII$
$lXIII = lXII . . . + lt - 3, 1727474$	$XIII' = \frac{1}{40} XIII$
$lXIV = lXIII . . . + lt - 3, 2470286$	$XIV' = \frac{1}{43} XIV$
$lXV = lXIV . . . + lt - 3, 3068844$	$XV' = \frac{1}{46} XV$
$lXVI = lXV . . . + lt - 3, 3628844$	$XVI' = \frac{1}{49} XVI$
$lXVII = lXVI + lt - 3, 4154951$	$XVII' = \frac{1}{52} XVII$
$lXVIII = lXVII + lt - 3, 4651028$	$XVIII' = \frac{1}{55} XVIII$
$lXIX = lXVIII + lt - 3, 5120318$	$XIX' = \frac{1}{58} XIX$
$lXX = lXIX . . . + lt - 3, 5565564$	$XX' = \frac{1}{61} XX$

§. 34. Nunc igitur tantum opus est, vt numero t varii valores tribuantur pro lubitu, qui tamen non nimium a veritate abhorreere videantur; quare cum in praecedente differtatione ostenderimus, hunc numerum t certe minorem esse quam 266, incipiamus nostram inuestigationem

A a nem

nem a valore $t = 200$, visuri, vtrum iste valor iusto sit maior, an minor. Quod si enim hinc valor formulae nostrae $P(1 + Q') - QP'$ prodierit positivus, id erit indicio, istum valorem $t = 200$ esse nimis parvum; sin autem prodierit negativus, numerum t diminui oportebit.

§. 35. Sumamus igitur $t = 200$ et calculus pro seriebus P et P' ita stabit:

	Pro serie P .	Pro serie P' .
$I = 0,0000000$	$I = + 1,0000$	$I' = + 0,5000$
$I t = 2,3010300$		
<u>2,3010300</u>		
1,3802112		
$II = 0,9208188$	$II = - 8,3333$	$II' = - 1,6667$
<u>2,3010300</u>	<u>- 7,3333</u>	<u>- 1,1667</u>
3,2218488		
<u>1,7201593</u>		
$III = 1,5016895$	$III = + 31,7460$	$III' = + 3,9682$
<u>2,3010300</u>	<u>+ 24,4127</u>	<u>+ 2,8015</u>
3,8027195		
<u>2,0122340</u>		
$IV = 1,7904855$	$IV = - 61,7285$	$IV' = - 5,6117$
<u>2,3010300</u>	<u>- 37,3158</u>	<u>- 2,8102</u>
4,0915155		
<u>2,2345173</u>		
$IV = 1,8569982$	$V = + 71,9446$	$V' = + 5,1389$
	<u>+ 34,6288</u>	<u>+ 2,3287</u>
		$IV =$

	Pro serie P.	Pro serie P ^l .
$\begin{array}{r} IV = 1,8569982 \\ \underline{2,3010300} \\ 4,1580282 \\ \underline{2,4123950} \end{array}$	$\begin{array}{r} V = + 71,9446 \\ \underline{ 34,6288} \end{array}$	$\begin{array}{r} V' = + 5,1389 \\ \underline{ 2,3287} \end{array}$
$\begin{array}{r} I VI = 1,7456332 \\ \underline{2,3010300} \\ 4,0466632 \\ \underline{2,5603551} \end{array}$	$\begin{array}{r} VI = - 55,6715 \\ \underline{ 21,0427} \end{array}$	$\begin{array}{r} VI' = - 3,2748 \\ \underline{ 0,9461} \end{array}$
$\begin{array}{r} I VII = 1,4863081 \\ \underline{2,3010300} \\ 3,7873381 \\ \underline{2,6869185} \end{array}$	$\begin{array}{r} VII = + 30,6414 \\ \underline{ 9,5987} \end{array}$	$\begin{array}{r} VII' = + 1,5321 \\ \underline{ 0,5860} \end{array}$
$\begin{array}{r} I VIII = 1,1004196 \\ \underline{2,3010300} \\ 3,4014496 \\ \underline{2,7974566} \end{array}$	$\begin{array}{r} VIII = - 12,6014 \\ \underline{ 3,0027} \end{array}$	$\begin{array}{r} VIII' = - 0,5479 \\ \underline{ 0,0381} \end{array}$
$\begin{array}{r} I IX = 0,6039930 \\ \underline{2,3010300} \\ 2,9050230 \\ \underline{2,8955551} \end{array}$	$\begin{array}{r} IX = + 4,0179 \\ \underline{ 1,0152} \end{array}$	$\begin{array}{r} IX' = + 0,1545 \\ \underline{ 0,1926} \end{array}$
$\begin{array}{r} I X = 0,0094679 \\ \underline{2,3010300} \\ 2,3104979 \\ \underline{2,9837228} \end{array}$	$\begin{array}{r} X = - 1,0220 \\ \underline{ 0,0068} \end{array}$	$\begin{array}{r} X' = - 0,0352 \\ \underline{ 0,1574} \end{array}$
$I XI = 9,3267751$	$\begin{array}{r} XI = + 0,2122 \\ \underline{ 0,2054} \end{array}$	$\begin{array}{r} XI' = + 0,0066 \\ \underline{ 0,1640} \end{array}$
	A a 2	I XI

	Pro serie P.	Pro serie P'.
$1XI = 9,3267751$ $\underline{2,3010300}$ $1,6278051$ $\underline{3,0637814}$	$XI = + 0,2122$ $\underline{+ 0,2054}$	$XI' = + 0,0066$ $\underline{+ 0,1640}$
$1XII = 8,5640237$ $\underline{2,3010300}$ $0,8650537$ $\underline{3,1370931}$	$XII = - 0,0366$ $\underline{+ 0,1688}$	$XII' = - 0,0010$ $\underline{+ 0,1630}$
$1XIII = 7,7279606$ $\underline{2,3010300}$ $0,0289906$ $\underline{3,2047065}$	$XIII = + 0,0053$ $\underline{+ 0,1741}$	$XIII' = + 0,0001$ $\underline{+ 0,1631}$
$1XIV = 6,8242841$	$XIV = - 0,0007$ $\underline{+ 0,1734}$	

§. 36. Simili modo instituatur calculus pro inueniendis valoribus Q et Q', quippe qui, in vsum vocando formulas §. 33. exhibitas, ita se habebit:

	Pro serie Q.	Pro serie Q'.
$1I = 2,3010300$ $\underline{0,7781513}$		
$1I = 1,5228787$ $\underline{2,3010300}$ $3,8259087$ $\underline{1,6020600}$	$I = + 33,3333$	$I' = + 8,3333$
$1II = 2,2218487$	$II = - 166,6667$ $\underline{- 133,3334}$	$II' = - 23,8095$ $\underline{- 15,4762}$ $1II =$

	Pro ferie Q.	Pro ferie Q'.
$\begin{array}{r} \text{II} = 2,2218487 \\ \underline{2,3010300} \\ 4,5228787 \\ \underline{1,9242793} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{II} = -166,6667 \\ \underline{133,3334} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{II}' = -23,8095 \\ \underline{15,4762} \end{array}$
$\begin{array}{r} \text{III} = 2,5985994 \\ \underline{2,3010300} \\ 4,8996294 \\ \underline{2,1663314} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{III} = +396,8254 \\ \underline{263,4920} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{III}' = +39,6825 \\ \underline{24,2063} \end{array}$
$\begin{array}{r} \text{IV} = 2,7332980 \\ \underline{2,3010300} \\ 5,0343280 \\ \underline{2,3569815} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{IV} = -541,1255 \\ \underline{277,6335} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{IV}' = -41,6250 \\ \underline{17,4187} \end{array}$
$\begin{array}{r} \text{V} = 2,6773465 \\ \underline{2,3010300} \\ 4,9783765 \\ \underline{2,5137501} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{V} = +475,7147 \\ \underline{198,0812} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{V}' = +29,7322 \\ \underline{12,3135} \end{array}$
$\begin{array}{r} \text{VI} = 2,4646264 \\ \underline{2,3010300} \\ 4,7656564 \\ \underline{2,6467304} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{VI} = -291,4918 \\ \underline{93,4106} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{VI}' = -15,3417 \\ \underline{3,0282} \end{array}$
$\begin{array}{r} \text{VII} = 2,1189260 \\ \underline{2,3010300} \\ 4,4199560 \\ \underline{2,7621424} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{VII} = +131,5001 \\ \underline{38,0895} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{VII}' = +5,9773 \\ \underline{2,9491} \end{array}$
$\begin{array}{r} \text{VIII} = 1,6578136 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{VIII} = -45,4793 \\ \underline{7,3898} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{VIII}' = -1,8192 \\ \underline{1,1209} \end{array}$
	A a 3	/ VIII

	Pro ferie Q.	Pro ferie Q'.
$\begin{array}{r} I\text{VIII} = 1,6578136 \\ \underline{2,3010300} \\ 3,9588436 \\ \underline{2,8640659} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{VIII} = -45,4793 \\ \underline{7,3898} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{VIII}' = -1,8192 \\ \underline{1,1299} \end{array}$
$\begin{array}{r} I\text{IX} = 1,0947777 \\ \underline{2,3010300} \\ 3,3958077 \\ \underline{2,9553135} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{IX} = +12,4388 \\ \underline{5,0490} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{IX}' = +0,4442 \\ \underline{1,5741} \end{array}$
$\begin{array}{r} I\text{X} = 0,4404942 \\ \underline{2,3010300} \\ 2,7415242 \\ \underline{3,0379043} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{X} = -2,7574 \\ \underline{2,2916} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{X}' = -0,0889 \\ \underline{1,4852} \end{array}$
$\begin{array}{r} I\text{XI} = 9,7036199 \\ \underline{2,3010300} \\ 2,0046499 \\ \underline{3,1133355} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XI} = +0,5054 \\ \underline{2,7970} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XI}' = +0,0149 \\ \underline{1,5001} \end{array}$
$\begin{array}{r} I\text{XII} = 8,8913144 \\ \underline{2,3010300} \\ 1,1923444 \\ \underline{3,1727474} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XII} = -0,0779 \\ \underline{2,7191} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XII}' = -0,0021 \\ \underline{1,4980} \end{array}$
$\begin{array}{r} I\text{XIII} = 8,0195970 \\ \underline{2,3010300} \\ 0,3206270 \\ \underline{3,2470286} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XIII} = +0,0105 \\ \underline{2,7296} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{XIII}' = +0,0002 \\ \underline{1,4980} \end{array}$
$I\text{XIV} = 7,0735984$	$\begin{array}{r} \text{XIV} = -0,0012 \\ \underline{2,7284} \end{array}$	

§. 37. Inuentis igitur quatuor his valoribus :

$$P = + 0, 1734 ; Q = + 2, 7284$$

$$P' = + 0, 1631 ; Q' = + 1, 4980$$

colligimus inde ista producta :

$$P (1 + Q') = 0, 4331$$

$$Q P' = 0, 4450$$

quorum posterius primum tantum superat particula $= 0, 0119$, quae differentia cum iam sit vehementer parua, et negativa, nobis iam manifesto declarat, valorem assumptum $t = 200$ vix a valore vero discrepare, eumque aliquantillum superare, vnde superfluum foret accuratius in istum valorem inquirere: eius enim radix cubica tantum in computum ingreditur, quae a notabiliore errore litterae t vix sensibilem errorem gigneret. Hoc igitur numero t inuento, quem tamen tantillo minorem accipere conueniet, problema principale, quod hic nobis est propositum, perfecte resolvere poterimus.

Problema.

§. 38. *Pro omnibus columnis cylindricis assignare maximam altitudinem, quam sustinere valent, antequam sub proprio pondere corruant.*

Solutio.

Praesto fit columella, pariter cylindrica, ex eadem materia parata atque ipsae columnae, de quibus quaestio formatur; sit istius columellae altitudo $= a$ eiusque amplitudo $= d d$, atque per experimenta exploretur maximum onus, quod ista columella sine periculo fractionis sustinere
valet

valet, cuius pondus repertum sit se habere ad proprium pondus columellae vt $\lambda : 1$, ita vt iam λ sit numerus cognitus, quo inuento ponamus quaestionem institui circa columnam ex eadem materia confectam, cuius amplitudo sit $= b b$, atque supra ostendimus maximam altitudinem

quaesitam esse $b = a \sqrt[3]{\frac{\lambda b b}{\pi \pi d d}} \cdot t$. Sumto iam $t = 200$ erit $l \frac{t}{\pi \pi} = 1,3067302$, hincque $\frac{1}{3} l \frac{t}{\pi \pi} = 0,4355767$, cui respondet numerus $2,7263$, qui cum aliquantillum diminui debeat, eius loco scribamus numerum e , cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, quippe qui est $2,71828$, ita vt iam maxima altitudo quaesita sit $b = 2,7183 \cdot a \sqrt[3]{\frac{\lambda b b}{d d}}$, vel adeo in numeris rotundioribus statui poterit $b = 2,70 \sqrt[3]{\frac{\lambda b b}{d d}}$.

§. 39. Cum igitur antehac in determinatione oneris, quod quaevis columna gestare valet, nullam proprii ponderis rationem tenuissem, regula etiam, quam inde deduxeram, quadam leui correctione indigebit, quae autem tam erit exigua, vt in praxi tuto negligi queat. Ad quod ostendendum columnam hic inuentam, quae sub proprio pondere occumbit, iuxta regulam ante datam examinemus, qua onera inuenta sunt tenere rationem duplicatam compositam ex directa amplitudinum seu basium et reciproca altitudinum. Hinc cum columellae pro modulo assumtae altitudo esset $= a$, amplitudo siue area baseos $= d d$ et onus gestatum $= \lambda a d d$, ipsius autem columnae inuentae amplitudo $= b b$, altitudo vero $b = a \sqrt[3]{\frac{\lambda b b t}{\pi \pi d d}}$, ponamus onus, quod haec columna iuxta regulam gestare posset $= \xi b b b$; vbi $b b b$ exhibet ipsum huius columnae pondus.

dus. His positis, secundum nostram regulam esse deberet
 $\lambda a d d : \xi h b b = \frac{d^4}{a^4} : \frac{b^4}{b^4}$, vnde deducitur $\xi = \frac{\lambda a^3 b b}{b^3 a d}$, et loco
 b^3 substituto suo valore erit $\xi = \frac{\pi \pi}{1}$, hoc est circiter $\xi = \frac{1}{20}$;
 scilicet iuxta regulam haec columna sustineret partem vi-
 gesimam proprii ponderis, dum reuera sub proprio ponde-
 re succumbit.

§. 40. Vicissim ergo, quoties ista regula declarat,
 columnam quampiam tantum vigesimam proprii ponderis
 partem sustinere posse, tum concludere debemus, eam nul-
 lum plane onus gestare posse, sed sub proprio pondere oc-
 cumbere. Cum igitur nullae vnquam columnae adhiberi
 soleant, nisi quae onera multo grauiora sustentare valeant,
 manifestum est, errorem illius regulae nullius plane esse
 momenti, atque in praxi tuto negligi posse, perinde ac si
 proprium pondus nihil plane conferret, ad vim columna-
 rum diminuendam, quemadmodum in prima de hoc argu-
 mento dissertatione est assertum.

VARIA PROBLEMATA
CIRCA STATVM AEQVILIBRII
TRABIVM COMPACTILIVM
ONERATARVM,

EARVMQVE VIRES ET PRESSIONEM CONTRA
ANTERIDES.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Problema I.

§. I.

Tab. V. **S**i duae traves AC et BC , plano horizontali in A et B
Fig. 1. insistentes, in C contra se inuicem innitantur et ab incumben-
te pondere P deorsum premantur, definire vires, quibus tra-
bes in A et B retineri debent, tum vero etiam vires quas
utraque trabs sustinet.

Solutio.

Sit trabium longitudo $AC = a$ et $BC = b$, inter-
vallum vero $AB = c$ et pondus deorsum premens $= P$,
quas quantitates constanter vt cognitae spectare licet. Sta-
tuantur porro anguli, sub quibus traves ad horizontem in-
cli-

clinantur $BAC = \alpha$ et $ABC = \beta$, eritque angulus $ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$, anguli vero (demisso ex C perpendicularo COP) $ACO = 90^\circ - \alpha$ et $BCO = 90^\circ - \beta$. At ex elementis constat, angulos inclinationis α et β ita per quantitates a, b, c , definiri, vt sit

$$\cos. \alpha = \frac{cc + aa - bb}{2ac} \text{ et } \cos. \beta = \frac{cc + bb - aa}{2bc}.$$

Resoluatur iam vis deorsum vrgens P secundum directiones CA et CB . Hunc in finem repraesentet perpendicularum CP ipsum pondus P , ducanturque rectae Pa et Pb , ipsis BC et AC parallelae, eritque

$$CP : Ca = P : \text{vim sec. } CA$$

$$CP : Cb = P : \text{vim sec. } CB.$$

Cum igitur ex parallelogrammo $CaPb$ sit

$$CP : Ca = \sin. CaP : \sin. CPa \text{ et}$$

$$CP : Cb = \sin. CaP : \sin. CPb, \text{ erit}$$

$$\text{Vis secundum } CA = \frac{P \sin. CPa}{\sin. CaP} \text{ et}$$

$$\text{Vis secundum } CB = \frac{P \sin. CPb}{\sin. CaP}.$$

Manifestum autem est, angulum CPa aequalem esse eius alterno $BCO = 90^\circ - \beta$, et angulum CaP anguli ACB complemento aequalem, hoc est $= \alpha + \beta$, similique modo erit $CPb = ACO = 90^\circ - \alpha$, quibus introductis fiet

$$\text{Vis secundum } CA = \frac{P \cos. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$$

$$\text{Vis secundum } CB = \frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)}$$

atque hae binae vires idem praestabunt ac sola vis $CP = P$, in cuius effectum inquirendi nobis est propositum.

Quoniam igitur trabs CA basin vrget in directione Aa vi
$$= \frac{P \cos. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$$
, si eam denuo resoluamus, secundum directiones

nes Af et Ag , in duas alias vires, orietur

Pro directione horizontali Af vis $= \frac{P \cos. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$ et

Pro directione verticali Ag vis $= \frac{P \sin. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$.

Pro altera vero trabe, basin in directione $B\beta$ vrgente, vi $= \frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)}$, eam secundum directiones Bf' et Bg' in duas alias. resoluendo, obtinetur

Pro directione horizontali Bf' vis $= \frac{P \cos. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$

Pro directione verticali Bg' vis $= \frac{P \cos. \alpha \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$.

Corollarium I.

§. 2. Ex hac solutione patet, vires horizontales, non obstante differentia trabium esse aequales vtrunque; ambas vero vires verticales, iunctim sumtas, aequari ponderi P , vti requiritur. Tum vero, posita trabium longitudine aequali, hoc est $a = b$, fiet $\alpha = \beta$, et vires tam horizontales quam verticales erunt vtrunque aequales; illae scilicet $= \frac{1}{2} P \cot. \alpha$, hae vero $= \frac{1}{2} P$. At casu $\alpha = \beta = 45^\circ$ erit vtrunque vis horizontalis $=$ vi verticali $= \frac{1}{2} P$.

Corollarium II.

§. 3. Quia traves altera AC comprimitur secundum suam longitudinem vi $= \frac{P \cos. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$, altera vero BC vi $= \frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)}$: evidens est, trabem minori angulo oppositam maiorem vim sustinere, contra vero, trabem maiori angulo oppositam minorem. Positis autem angulis inclinationis aequalibus, vis compressiva vtrunque est eadem $= \frac{P}{2 \sin. \alpha}$.

Scho-

Scholion.

§. 4. Hinc etiam definiri poterit crassities, vtrique trabi ad has vires sustentandas necessaria, ex iis, quae summus *Eulerus*, de vi columnarum agens, non ita pridem cum Academia communicavit; vbi scilicet ostendit: *Vim, quam columna sustinere valet, esse vt quadratum crassitie directe et vt quadratum longitudinis inuerse*. Si enim columna, ex eadem, qua trabes, materia confecta, longitudinis $= A$ et crassitie $= CC$, sustinere valeat onus $= O$ erit vi memorati Theorematis $O = \frac{C^4}{A^3}$. Spectato igitur hoc onere O vt cognito, quoniam trabis alterius $A C$ longitudo posita est $= a$, si eius crassities designetur per ff , ob vim eam comprimentem $= \frac{P \cos. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$ habebitur haec proportio: $O : \frac{C^4}{A^3} = \frac{P \cos. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)} : \frac{f^4}{a^3}$, vnde deducitur crassities trabis $A C$, scil. $ff = \frac{a^3 CC}{A^3} \sqrt[3]{\frac{P \cos. \beta}{O \sin. (\alpha + \beta)}}$. Similique modo reperietur crassities gg trabis alterius $B C$, scil.

$$gg = \frac{b^3 CC}{A^3} \sqrt[3]{\frac{P \cos. \alpha}{O \sin. (\alpha + \beta)}}$$

Problema II.

§. 5. Si compages ex tribus trabibus AB , BC , Tab. V. CD composita punctis fixis A et D insistat, atque in punctis Fig. 4. B et C grauata fuerit ponderibus P et Q , inuenire sit. m , in quo haec compages erit in aequilibrio; tum vero vires, quas singulae trabes sustinebunt, vna cum pressione contra terminos fixos siue anterides A et B .

Solutio.

Vocentur trarium longitudines $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, ducisque ex B et C rectis horizontalibus Bb

et Cc sint inclinationes ad horizontem, seu anguli

$$BAa = \alpha, CBb = \beta, DCc = -\gamma.$$

His positis erunt interualla

$Aa = a \cos. \alpha$; $Bb = b \cos. \beta$; $Cc = c \cos. \gamma$,
et altitudines, seu perpendiculara ex iuncturis demissa

$$Ba = a \sin. \alpha$$
; $Cb = b \sin. \beta$; $Dc = -c \sin. \gamma$.

Iam cum puncta A et D sint data, ducatur verticalis DM ,
voceturque distantia $AM = m$ et altitudo $MD = n$, at-
que manifestum est fore

$$m = a \cos. \alpha + b \cos. \beta + c \cos. \gamma \text{ et}$$

$$n = a \sin. \alpha + b \sin. \beta + c \sin. \gamma$$

atque ex his duabus aequationibus, in quibus tam longitu-
dines trabium a, b, c , quam interualla m et n sunt co-
gnita, trium angulorum α, β, γ , duo determinantur:
tertius vero, ex conditione aequilibrii definiendus, adhuc
manet indefinitus.

Tab. V.

Fig. 5.

Resoluatur nunc vis deorsum vrgens $BP = P$ se-
cundum directiones longitudinales trabium BA et BC ;
hunc in finem faciatur Parallelogrammum $Pa' Bc'$, ex quo
colligitur: $BP : Ba' = P : \text{vim sec. } BA$

$$\text{et } BP : Bc' = P : \text{vim sec. } BC.$$

Eft vero

$$BP : Ba' = \sin. Ba'P : \sin. BP a' = \sin. ABC : \sin. aBC$$

$$BP : Bc' = \sin. Bc'P : \sin. BP c' = \sin. ABC : \sin. aBA$$

Fig. 4. vnde per angulos ad priorem figuram relatos erit

$$P : \text{vim sec. } BA = \sin. ABC : \sin. aBC$$

$$P : \text{vim sec. } BC = \sin. ABC : \sin. aBA$$

ex quibus analogiis nanciscimur

$$\text{vim secundum } B A = \frac{P \sin. a B C}{\sin. A B C}$$

$$\text{vim secundum } B C = \frac{P \sin. a B A}{\sin. A B C}$$

Est vero angulus $A B C = 180^\circ - \alpha + \beta$, angulus

$$a B C = 90^\circ + \beta \text{ et } a B A = 90^\circ - \alpha,$$

quibus introductis fiet

$$\text{vis secundum } B A = \frac{P \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)} \text{ et}$$

$$\text{vis secundum } B C = \frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \beta)}.$$

Quod si iam simili modo pondus alterum deorsum
urgens $C Q = Q$ secundum directiones trabium $C B$ et
 $C D$ resoluatur, ex praecedentibus manifestum est, am-
bas vires, ponderi Q aequivalentes, sequenti modo ex-
pressas haberi:

$$\text{Vis secundum } C B = \frac{Q \sin. b C D}{\sin. B C D},$$

$$\text{Vis secundum } C D = \frac{Q \sin. b C B}{\sin. B C D},$$

quae autem expressiones, ob angulos

$$B C D = 180^\circ - \beta + \gamma; b C D = 90^\circ + \gamma \text{ et}$$

$$b C B = 90^\circ - \beta,$$

hanc induent formam:

$$\text{Vis secundum } C B = \frac{Q \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)},$$

$$\text{Vis secundum } C D = \frac{Q \cos. \beta}{\sin. (\beta - \gamma)}.$$

His inuentis notetur primo aequilibrium subsistere non
posse, nisi vires, secundum directiones sibi contrarias $B C$
et $C B$ agentes, sint inter se aequales, hoc est, nisi fuerit

$$\frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \beta)} = \frac{Q \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)}.$$

En igitur nacti sumus tertiam aequationem, duabus priori-
bus

bus iungendam, ex quibus status aequilibrîi, siue terni anguli inclinationis α , β , γ , perfecte determinantur, cum fieri debeat.

$$\text{I}^{\circ}. m = a \cos. \alpha + b \cos. \beta + c \cos. \gamma$$

$$\text{II}^{\circ}. n = a \sin. \alpha + b \sin. \beta + c \sin. \gamma,$$

$$\text{III}^{\circ}. \frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \beta)} = \frac{Q \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)}.$$

Postquam autem hi anguli rite fuerint determinati, videndum est, quantas vires termini fixi, seu fulcimenta A et D sustinere debent. Ac primo quidem, cum inuenerimus vim secundum BA, basin in directione A α vergentem $= \frac{P \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)}$, resolvatur ea in duas alias vires, secundum directiones A p et A q agentes, eritque

$$\text{Vis horizontalis A } p = \frac{P \cos. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)},$$

$$\text{Vis verticalis A } q = \frac{P \sin. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)}.$$

Eodem modo si vis altera CD $= \frac{Q \cos. \beta}{\sin. (\gamma - \beta)}$, baseos terminum D in directione D δ vergens, resolvatur secundum directiones D r et D s , orietur

$$\text{Vis horizontalis D } r = \frac{Q \cos. \beta \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)},$$

$$\text{Vis verticalis D } s = \frac{Q \cos. \beta \sin. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)}.$$

Corollarium I.

§. 6. Ex natura aequilibrîi supra deduximus hanc aequationem:

$$\frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \beta)} = \frac{Q \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)},$$

quae

quae, si vtrunque multiplicetur per $\cos. \beta$, abit in sequentem:

$$\frac{P \cos. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)} = \frac{Q \cos. \beta \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)}.$$

Cum igitur huius aequationis pars dextra exhibeat vim horizontalem secundum $D r$, sinistra vero vim horizontalem secundum $A p$, manifestum est, vires horizontales itidem, non obstante differentia trabium, inter se esse aequales, vti in Problemate primo, pro casu duarum trabium, observauimus.

Corollarium II.

§. 7. Hic autem altera proprietas, supra in Problemate primo observata, quod vires verticales aequentur ponderibus grauantibus, non tam facile perspicitur; verum sequenti modo haec proprietas pro hoc casu demonstrari potest. Cum sit summa virium verticalium

$$A q + D s = \frac{P \sin. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)} - \frac{Q \cos. \beta \sin. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)},$$

resumatur aequatio ex natura aequilibrui deducta

$$\frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \beta)} - \frac{Q \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)} = 0,$$

quae, si ducatur in $\sin. \beta$ et subtrahatur a priori, summae ponderum $P + Q$ aequanda, relinquit hanc aequationem:

$$\frac{P (\sin. \alpha \cos. \beta - \cos. \alpha \sin. \beta)}{\sin. (\alpha - \beta)} - \frac{Q \cos. \beta \sin. \gamma - \cos. \gamma \sin. \beta}{\sin. (\beta - \gamma)} = P + Q,$$

quae manifesto est identica.

Corollarium III.

§. 8. Sumatur $\alpha = -\gamma = 90^\circ$ et $\beta = 0$, ita vt Tab. V. tota compages consistat ex duabus trabibus verticalibus Fig. 6.

Tab. V. Fig. 7 A B et C D, horizontali B C iunctis, eruntque vires horizontales $A p$ et $D r = 0$, verticales vero $A q = P$ et $D s = Q$, vti rei natura postulat. Sin autem solus angulus β fuerit $= 0$, ita vt media trabs B C in directione horizonti parallela binis reliquis A B et C D, vtcunque inclinatis, insistat, erunt vires

$$A p = \frac{P \cos. \alpha}{\sin. \alpha}; A q = P; D r = \frac{Q \cos. \gamma}{\sin. \gamma} \text{ et } D s = Q.$$

Casu igitur $\alpha = -\gamma = 45^\circ$ fiet, vti requiritur,

$$A p = A q = P \text{ et } D r = D s = Q.$$

Scholion I.

§. 9. Quod si vim horizontalem, quam compages in vtroque termino exerit, littera V designemus, eamque tanquam cognitam spectemus, inde definire poterimus onera grauantia P et Q. Cum enim hoc modo sit

$$\frac{P \cos. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)} = V \text{ et } \frac{Q \cos. \beta \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)} = V,$$

colligimus

$$P = \frac{V \sin. (\alpha - \beta)}{\cos. \alpha \cos. \beta} \text{ et } Q = \frac{V \sin. (\beta - \gamma)}{\cos. \beta \cos. \gamma}.$$

Tum vero erit vis, qua trabs A B secundum suam longitudinem comprimitur $= \frac{P \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)} = \frac{V}{\cos. \alpha}$; similique modo vis, qua trabs B C comprimitur

$$= \frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \beta)} = \frac{Q \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)} = \frac{V}{\cos. \beta};$$

denique vis, qua trabs C D sollicitatur, quae erat

$$= \frac{Q \cos. \beta}{\sin. (\beta - \gamma)} = \frac{V}{\cos. \gamma}.$$

Vnde patet, has vires esse reciproce vt cosinus, siue directe vt secantes inclinationum.

Scholi-

Scholion II.

§. 10. Ex his autem viribus, vt supra §. 4. craffities cuiusque trabis determinari potest. Sit enim A longitudo et CC craffities columnae lignae, oneri O susten-
tando paris, et posita craffitie trabis $AB = ff$, trabis
 $BC = gg$ trabisque $CD = hh$, ob analogiam theorematis
Euleriani,

$$O: \frac{C^4}{A^2} = \frac{V}{\cos. \alpha} : \frac{f^4}{a^2} = \frac{V}{\cos. \beta} : \frac{g^4}{b^2} = \frac{V}{\cos. \gamma} : \frac{h^4}{c^2}, \text{ erit}$$

$$\text{Pro trabe } AB \text{ craffities } ff = \frac{a^2 C C}{A} \sqrt{\frac{V}{O \cos. \alpha}},$$

$$\text{ - - - } BC \text{ - - } gg = \frac{b^2 C C}{A} \sqrt{\frac{V}{O \cos. \beta}},$$

$$\text{ - - - } CD \text{ - - } hh = \frac{c^2 C C}{A} \sqrt{\frac{V}{O \cos. \gamma}}.$$

Scholion III.

§. 11. Ceterum notetur, formulas pro ponderibus grauantibus P et Q etiam sequenti modo exprimi posse:

$$P = \frac{V (\sin. \alpha \cos. \beta - \cos. \alpha \sin. \beta)}{\cos. \alpha \cos. \beta} = V (\tan. \alpha - \tan. \beta)$$

$$Q = \frac{V (\sin. \beta \cos. \gamma - \cos. \beta \sin. \gamma)}{\cos. \beta \cos. \gamma} = V (\tan. \beta - \tan. \gamma).$$

Hinc si ambo pondera P et Q fuerint inter se aequalia, erit $\tan. \alpha - \tan. \beta = \tan. \beta - \tan. \gamma$; vnde patet, tangentes inclinationum α, β, γ , constituere progressionem arithmeticam.

Scholion IV.

§. 12. Quod si insuper trabium longitudines a, b, c , statuuntur inter se aequales, ternae aequationes, an-
C c 2 gulos

gulos inclinatorios definientes, sequentem induent formam:

$$\text{I. } \frac{m}{a} = \cos. \alpha + \cos. \beta + \cos. \gamma,$$

$$\text{II. } \frac{n}{a} = \sin. \alpha + \sin. \beta + \sin. \gamma.$$

$$\text{III. } 0 = \tan. \alpha - 2 \tan. \beta + \tan. \gamma.$$

Hinc si fuerit altitudo $MD = n = 0$, erit

$$\text{II. } 0 = \sin. \alpha + \sin. \beta + \sin. \gamma,$$

cui aequationi, pariter ac tertiae, satisfit sumendo $\beta = 0$ et $\gamma = -\alpha$; ex prima autem definitur angulus α , cum sit $\cos. \alpha = \frac{m-a}{a}$.

Problema III.

Tab. V. §. 13. Si compages ex quocunque trabibus confecta in punctis fixis A et E insistat, iuncturae autem B, C, D, etc. grauentur ponderibus P, Q, R, etc. inuenire statum aequilibrii, in quem haec compages se componet, dein vires, quas in anterides in A et E exerit, ac tertio vires, quas singula trabes sustinere debet.

Solutio.

Sit longitudo trabis $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, etc. ductisque rectis horizonti parallelis Bb , Cc , Dd , etc. vocentur inclinationes ad horizontem

$BAa = \alpha$; $CBb = \beta$; $DCc = -\gamma$; $EDd = -\delta$; etc. eruntque hinc interualla

$$Aa = a \cos. \alpha; Bb = b \cos. \beta; Cc = c \cos. \gamma; Dd = d \cos. \delta; \text{ etc.}$$

et

et perpendiculara ex iuncturis demissa

$Ba = a \sin. \alpha$, $Cb = b \sin. \beta$; $Dc = -c \sin. \gamma$; $Ed = -d \sin. \delta$; etc.
Vnde si fuerit distantia $AM = m$, et eleuatio alterius termini $ME = n$, habebimus statim has aequationes pro determinatione inclinationum:

$$I. m = a \cos. \alpha + b \cos. \beta + c \cos. \gamma + d \cos. \delta + \text{etc.}$$

$$II. n = a \sin. \alpha + b \sin. \beta + c \sin. \gamma + d \sin. \delta + \text{etc.}$$

Denotet iam V vim horizontalem, quam compages in utroque termino A et E exerit, atque ex solutione Problematis praecedentis manifestum est, fore

$$V = \frac{P \cos. \alpha \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)} = \frac{Q \cos. \beta \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)} = \frac{R \cos. \gamma \cos. \delta}{\sin. (\gamma - \delta)} \text{ etc.}$$

sive, pressione horizontali contra anterides ut cognita spectata, fient pondera

$$P = \frac{V \sin. (\alpha - \beta)}{\cos. \alpha \cos. \beta}; \quad Q = \frac{V \sin. (\beta - \gamma)}{\cos. \beta \cos. \gamma}; \quad R = \frac{V \sin. (\gamma - \delta)}{\cos. \gamma \cos. \delta}; \text{ etc.}$$

atque ex his aequationibus, cum binis prioribus coniunctis, inclinationes, seu status aequilibrui determinari debet.

Circa vires, quibus singula trabs secundum suam longitudinem comprimitur, consultetur etiam solutio praecedentis Problematis, ac inuenientur:

$$\text{Vis trabem } AB \text{ comprimens} = \frac{V}{\cos. \alpha}$$

$$- \quad - \quad BC \quad - \quad - \quad = \frac{V}{\cos. \beta}$$

$$- \quad - \quad CD \quad - \quad - \quad = \frac{V}{\cos. \gamma}$$

etc.

Supra enim iam obseruauimus, has vires esse inter se inuerse ut cosinus sive directe ut secantes inclinationum.

Scholion I.

§. 14. Cum igitur prima trabes A B terminum A vrgeat vi $= \frac{V}{\cos. \alpha}$, inde oritur

$$\text{Vis horizontalis} = V \text{ et}$$

$$\text{Vis verticalis} = V \text{ tang. } \alpha.$$

Simili modo pro altero termino E (considerando tantisper casum determinatum quatuor trabium) vis sollicitans est $= \frac{V}{\cos. \delta}$, quae resoluta dat

$$\text{Vim horizontalem} = V \text{ et}$$

$$\text{Vim verticalem} = -V \text{ tang. } \delta.$$

Vnde patet vires horizontales iterum esse inter se aequales. Vires autem verticales iunctim sumtae summae ponderum aequales esse debent, hoc est

$$V (\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \delta) = P + Q + R.$$

Cum autem fit

$$P = \frac{V \sin. (\alpha - \beta)}{\cos. \alpha \cos. \beta} = V (\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \beta)$$

$$Q = \frac{V \sin. (\beta - \gamma)}{\cos. \beta \cos. \gamma} = V (\text{tang. } \beta - \text{tang. } \gamma)$$

$$R = \frac{V \sin. (\gamma - \delta)}{\cos. \gamma \cos. \delta} = V (\text{tang. } \gamma - \text{tang. } \delta)$$

erit reuera

$$P + Q + R = V (\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \delta).$$

Scholion II.

§. 15. Si igitur dentur longitudines trabium a, b, c, d , et intervalla $AM = m$ et $ME = n$, vna cum ponderibus

deribus grauantibus P, Q, R, tot inde eruuntur aequationes, quot requiruntur, tam ad singulas inclinationes, quam ad vim horizontalem V, definiendas. Ita in figura 8, pro casu quatuor trabium, quinque adsunt incognitae, scil. anguli inclinationis α , β , γ , δ vna cum vi V, totidemque aequationes, quae autem ita sunt comparatae, vt nullo modo resolui queant, propter plures formulas maxime irrationales. Quod si enim statuere velimus $\text{tang. } \alpha = t$, erit

$$\sin. \alpha = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ et } \cos. \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Deinde vero cum sit

$$\frac{V}{P} = t - \text{tang. } \beta, \text{ erit } \text{tang. } \beta = t - \frac{V}{P},$$

eodemque modo colligitur

$$\text{tang. } \gamma = t - \frac{V}{P} - \frac{V}{Q}; \text{ tang. } \delta = t - \frac{V}{P} - \frac{V}{Q} - \frac{V}{R}.$$

Quare si breuitatis gratia ponatur

$\text{tang. } \beta = t - fV$; $\text{tang. } \gamma = t - gV$; $\text{tang. } \delta = t - hV$
existente

$$f = \frac{1}{P}; g = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q}; h = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R},$$

ita vt tantum duae adsint incognitae t et V, erit

$$\sin. \beta = \frac{t-fV}{\sqrt{1+(t-fV)^2}}; \cos. \beta = \frac{1}{\sqrt{1+(t-fV)^2}};$$

$$\sin. \gamma = \frac{t-gV}{\sqrt{1+(t-gV)^2}}; \cos. \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(t-gV)^2}};$$

$$\sin. \delta = \frac{t-hV}{\sqrt{1+(t-hV)^2}}; \cos. \delta = \frac{1}{\sqrt{1+(t-hV)^2}};$$

qui valores si in duabus prioribus aequationibus, pro distantia $AM = m$ et altitudine $ME = n$ inuentis, substituantur, orientur hae duae aequationes:

$$m =$$

$$m = \frac{a}{\sqrt{1+it}} + \frac{b}{\sqrt{1+(t-jV)^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+(t-gV)^2}} + \frac{d}{\sqrt{1+(t-hV)^2}};$$

$$n = \frac{at}{\sqrt{1+it}} + \frac{b(t-fV)}{\sqrt{1+(t-jV)^2}} + \frac{c(t-gV)}{\sqrt{1+(t-gV)^2}} + \frac{d(t-hV)}{\sqrt{1+(t-hV)^2}};$$

quae autem ita sunt comparatae, vt facile intelligatur, nullam dari viam, hinc binas incognitas t et V eruendi.

Scholion III.

§. 16. Sin autem quaestio inuertatur, ita vt praeter singularum trabium longitudinem a, b, c, d , etiam dentur inclinationes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, atque insuper vis illa horizontalis V , qua anterides in A et E vrgentur, inde facile definiri poterunt pondera grauantia P, Q, R , vna cum interuallis m et n . Erit enim in genere:

$$m = a \cos. \alpha + b \cos. \beta + c \cos. \gamma + d \cos. \delta + \text{etc.}$$

$$n = a \sin. \alpha + b \sin. \beta + c \sin. \gamma + d \sin. \delta + \text{etc.}$$

ipfa vero pondera grauantia erunt

$$P = V (\tan. \alpha - \tan. \beta)$$

$$Q = V (\tan. \beta - \tan. \gamma)$$

$$R = V (\tan. \gamma - \tan. \delta)$$

etc.

Haecque solutio insignem vsum haberi poterit in experimentis, quae super talibus trabibus compactilibus instituuntur.

Problema IV.

§. 17. Si numerus trabium hoc modo iunctarum fuerit infinitus, trabium autem longitudines vt et pondus, quod
sin-

singula trabecula sustinet, infinite paruae, inuenire curuam, ad quam istae trabeculae se component, dum in aequilibro subsistunt.

Solutio.

Sit $A Y y$ curua, quam ista compages accipiat, dum Tab. V. in aequilibrium se componit, atque in axe horizontali $A M$ Fig. 9. vocetur abscissa $A X = x$ et applicata $X Y = y$, ipse vero curuae arcus $A Y = s$. Iam consideretur curuae elementum quodcunque $Y y = ds$, vnamquamque compagis trabeculam repraesentans; atque pro hoc elemento (demissa ex puncto y applicata proxima $y x$, ductaque recta $Y u$ axi parallela) erit interuallum $X x = Y u = dx$ et $u y = dy$; tum vero elementum arcus $Y y = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, siue, posito $dy = p dx$, erit $ds = dx \sqrt{1 + pp}$.

Vocetur nunc elementi $Y y$ ad horizontem inclinatio, siue angulus $y Y u = \Phi$, erit tang. $\Phi = \frac{dy}{dx} = p$, sequentis vero elementi inclinatio cum sit $\Phi + d\Phi$, erit eius tangens $= p + dp$. Iam quia pondusculum, quo hoc elementum grauatur, est infinite paruum, ponatur id $= d\Pi$, et ob vim horizontalem, quam compages in termino A exerit, constantem, sit nobis nunc K , quod supra per V designauimus.

His positis quaelibet aequationum superioris Problematis, veluti $R = V (\text{tang. } \gamma - \text{tang. } \delta)$, huc transferri poterit. Erit enim vis horizontalis $V = K$, vis grauans $R = d\Pi$, inclinatio $\gamma = \Phi$ et $\delta = \Phi + d\Phi$, ideoque tang. $\gamma = p$ et tang. $\delta = p + dp$, quibus substitutis statim colligitur ista
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I. D d aequa-

aequatio: $d\Pi = -K dp$, quae aequatio est pro *Catenaria inuersa*, vti ex sequentibus clarius patebit. Nota enim est proprietas huius curuae, a celeberrimo *Ioanne Bernoulli* inuenta, quod sit dx ad dy vt pondus catenae ad potentiam grauantem. Spectata igitur vi fulcrum vrgente K vt effectum ponderis catenae, in sensum contrarium agentem, summa pondusculorum grauantium existente $= \Pi$, erit

$$dx : dy = -K : \Pi,$$

ex quo nascitur aequatio $\Pi = -\frac{K dy}{dx} = -K p$, vnde fit differentiando $d\Pi = -K dp$, quae est ea ipsa aequatio, quam nostra solutio suppeditauit.

Statim igitur ac lex, qua grauationes in singula elementa agunt, fuerit cognita, species curuae, siue curuatura $A Y$ accuratius definietur. Tres autem pro lege grauationis casus principales locum habere possunt: 1°.) Si vires grauantes elemento abscissae fuerint proportionales, quo igitur casu poni conueniet $d\Pi = \lambda dx$. 2°.) Si pondera fuerint in ratione elementorum arcus, hoc est $d\Pi = \lambda ds$. 3°.) Si fuerit $d\Pi = \lambda y dx$, ita vt onera sint in ratione spatiorum; quibus insuper quartus casus adiungi potest, quo compages a fluido superincumbente premitur, cuius altitudo super horizontali $A M$ si ponatur $= b$, elementum $Y y$ sustinebit pondus columnae, cuius altitudo $= b - y$ et basis $= dx$; tum igitur ponendum erit $d\Pi = (b - y) dx$. Hos ergo singulos casus hoc loco successiue percurramus.

Euolutio casus primi.

§. 18. Cum igitur hoc casu sit $d\Pi = \lambda dx = -K dp$, erit integrando $\lambda x = \text{const.} - K p = C - K p$, vnde fit

$$p =$$

$p = \frac{c - \lambda x}{K}$. Statuatur $\frac{c}{K} = \alpha$ et $\frac{\lambda}{K} = \beta$, ita ut sit $p = \alpha - \beta x$, unde multiplicando per dx erit $p dx = dy = \alpha dx - \beta x dx$, ideoque integrando $y = \alpha x - \frac{1}{2} \beta x x$, ubi constantis additione non opus est, quia posito $x = 0$ sponte fit $y = 0$. Prodit autem etiam $y = 0$ casu quo $x = \frac{2\alpha}{\beta}$; ex quo manifestum est curuam quaesitam hoc casu primo esse *Parabolam*, ex altera parte I in horizontem cadentem, ad distantiam $AI = \frac{2\alpha}{\beta}$. Si igitur capiatur punctum medium O, erit abscissa $AO = \frac{\alpha}{\beta}$, et applicata media $OM = \frac{\alpha^2}{2\beta}$, quae erit axis Parabolae, cuius parameter est $\frac{AO^2}{OM} = \frac{2}{\beta}$.

Euolutio casus secundi.

§. 19. Cum hic sit $d\Pi = \lambda ds = -K dp$ erit integrando $\lambda s = C - Kp$. Hic ergo arcus curuae assignatur, ex quo patet, eam fore rectificabilem. Quo autem aequationem inter coordinatas, obtineamus, loco ds scribamus $dx \sqrt{1 + pp}$, fietque

$$dx \sqrt{1 + pp} = -\frac{K}{\lambda} dp = -a dp,$$

existente $a = \frac{K}{\lambda}$, unde statim integrando prodiret:

$$x = -a l (p + \sqrt{1 + pp}) + C.$$

At vero cum sit $dx = -\frac{a dp}{\sqrt{1 + pp}}$, multiplicetur vtrunque per p , ut fiat

$$p dx = dy = -\frac{a p dp}{\sqrt{1 + pp}},$$

eritque integrando $y = b - a \sqrt{1 + pp}$, ex qua aequatione eruitur:

D d 2

$p =$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{((y-b)^2 - aa)}}{a},$$

vnde ista aequatio colligitur:

$$dx = \frac{a \, dy}{\sqrt{(y-b)^2 - aa}},$$

quae est pro Specie *Catenariae inuersae*, vti mox clarius patebit.

Consideretur enim curvae punctum supremum M, vbi eius tangens horizonti fit parallela, capiaturque verticalis, siue applicata media OM, pro axe. Cum igitur elementi in M angulus inclinatorius fit = 0, erit etiam tangens $p = 0$, ideoque, ob $y = b - a \sqrt{1 + pp}$, fiet applicata media $MO = b - a$. Statuatur autem br. gr. $MO = f$ et $AO = g$, sumtisque super axe MO, abscissa $MT = t$ et applicata $TY = u$, erit $x = g - u$ et $y = f - t$, atque $b = a + f$, vnde aequatio nostra supra inuenta, $dx = \frac{a \, dy}{\sqrt{((y-b)^2 - aa)}}$, hanc induet formam:

$$du = \frac{a \, dt}{\sqrt{((a+t)^2 - aa)}} \text{ siue } du = \frac{a \, dt}{\sqrt{(2at + t^2)}},$$

quae est aequatio satis nota pro catenaria.

Pro rectificatione huius curvae notetur esse arcus

$$MY = \int \sqrt{dt^2 + du^2} = \int \frac{(a+t) \, dt}{\sqrt{(2at + t^2)}},$$

vnde colligitur integrando $MY = \sqrt{2at + t^2}$. Ex hac evolutione patet, quamlibet huius curvae portionem talem compagem trabium exhibere posse, quoniam ambae literae f et g , ex calculo excefferunt, per quas scilicet relatio inter coordinatas, ad ambos axes AO et MO relatas, exprimebatur.

Operae

Operae pretium erit naturam aequationis inter co-
ordinatas t et u explorare et, quomodo altera per alteram
transcendenter exprimitur, ob oculos ponere. Hunc in
finem resumatur aequatio differentialis

$du = \frac{a dt}{\sqrt{(2at+tt)}}; \text{ ex qua fit } u = a \int \frac{dt}{\sqrt{(2at+tt)}}, \text{ pro}$
qua formula $\int \frac{dt}{\sqrt{2at+tt}}$ commodè integranda statuatur

$t(2a+t) = (2a+t)^2 z z, \text{ vt fit } t = \frac{2az z}{1-z z},$
eritque

$dt = \frac{2az dz}{(1-z z)^2} \text{ et } \sqrt{2at+tt} = \frac{2az}{1-z z},$
quibus substitutis erit

$$\int \frac{dt}{\sqrt{2at+tt}} = 2 \int \frac{dz}{1-z z}.$$

Notum autem est esse

$$\int \frac{dz}{1-z z} = \frac{1}{2} l \frac{1+z}{1-z},$$

vnde colligitur $u = a l \frac{1+z}{1-z}.$ Est vero $z = \sqrt{\frac{t}{2a+t}},$
quo valore restituto reperitur

$$u = a l \frac{\sqrt{2a+t} + \sqrt{t}}{\sqrt{2a+t} - \sqrt{t}}, \text{ siue}$$

$$u = a l \frac{a+t + \sqrt{2at+tt}}{a},$$

vbi constantis additione non opus est, quia posito $t=0,$
sponte fit $u=l x=0.$ Vicissim autem abscissa t per ap-
plicatam y sequenti modo determinari potest. Cum in-
venerimus,

$u = a l \frac{1+z}{1-z}, \text{ erit } \frac{u}{a} = l \frac{1+z}{1-z}, \text{ siue } l e^{\frac{u}{a}} = l \frac{1+z}{1-z},$
(denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est
vnitas), siue $e^{\frac{u}{a}} = \frac{1+z}{1-z},$ vnde elicitur:

D d 3

$z =$

$$z = \frac{e^{\frac{u}{a}} - 1}{e^{\frac{u}{a}} + 1} = \sqrt{\frac{t}{2a + t}}, \text{ ideoque}$$

$$t = \frac{a(e^{\frac{u}{a}} - 1)^2}{2e^{\frac{u}{a}}}.$$

Evolutio casus tertii.

§. 20. Cum hoc casu, vti §. 17. videre est, sit
 $d\Pi = -K dp = \lambda y dx$, erit multiplicando per p ,

$$\lambda p y dx = \lambda y dy = -K p dp,$$

et sumtis integralibus $\lambda y y = C - K p p$. Pro constante
 C determinanda ponatur, in ipso initio abscissarum A , vbi
 $y = 0$, fuisse $p = \alpha$, eritque $C = K \alpha \alpha$ et aequatio

$$\lambda y y = K (\alpha \alpha - p p), \text{ siue } y y = \frac{K}{\lambda} (\alpha \alpha - p p),$$

ex qua deducitur

$$p p = \alpha \alpha - \beta y y, \text{ existente } \beta = \frac{\lambda}{K};$$

hinc extracta radice fiet

$$p = \frac{d y}{d x} = \sqrt{\alpha \alpha - \beta y y}, \text{ ideoque } d x = \frac{d y}{\sqrt{(\alpha \alpha - \beta y y)}}.$$

Hinc ob $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ foret arcus,

$$A Y = s = \int d y \sqrt{\frac{1 + \alpha \alpha - \beta y y}{\alpha \alpha - \beta y y}}.$$

Ponatur br. gr. $\alpha \alpha - \beta y y = z z$, erit $y y = \frac{\alpha \alpha - z z}{\beta}$,

ideoque

$$y dy = -\frac{z dz}{\beta}, \text{ hincque } dy = -\frac{z dz}{\beta \sqrt{\alpha \alpha - z z}},$$

quo substituto foret arcus

$$A Y = s = -\frac{1}{\sqrt{\beta}} \int z dz \sqrt{\frac{1 + z z}{\alpha \alpha - z z}}.$$

Arcus ellipticus, cuius rectificatio frustra tentaretur.

Cete-

Ceterum notetur, ex aequatione $dx = \frac{dy}{\sqrt{\alpha\alpha - \beta\gamma\gamma}}$ prodire $x = \frac{1}{\sqrt{\beta}} A \sin. \frac{\gamma\sqrt{\beta}}{\alpha}$, unde colligitur $y = \frac{\alpha \sin. x \sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}}$. Casu igitur $x = 0$, fit etiam $y = 0$; tum vero fit adhuc $y = 0$ casu $x = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$. Cum igitur fit $AI = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$, erit abscissa $AO = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}$, et applicata media $MO = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$, tum vero parameter $\frac{AO^2}{OM} = \frac{\pi\pi}{4\alpha\sqrt{\beta}}$.

Euolutio casus quarti.

§. 21. Supra iam vidimus, hoc casu fore

$$d\Pi = -K dp = (b-y) dx,$$

unde multiplicando per p , fit

$$(b-y) p dx = (b-y) dy = -K p dp,$$

ideoque integrando $by - \frac{1}{2}yy = -\frac{1}{2}Kpp$, vel adiecta constante et sublatis fractionibus, erit $2by - yy = C - Kpp$. Quod si igitur, uti casu praecedente statuimus, in ipso termino A fuerit $p = \alpha$, posito $y = 0$ fieri debet $0 = C - K\alpha\alpha$, unde colligitur constans $C = K\alpha\alpha$, quo valore substituto aequatio nostra integrata fiet

$$y(2b-y) = K(\alpha\alpha - pp), \text{ ex qua deducitur}$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\alpha\alpha - \frac{1}{K}y(2b-y)}, \text{ siue}$$

$$dx = \frac{dy\sqrt{K}}{\sqrt{\alpha\alpha K - y(2b-y)}}.$$

Iam referamus haec ad axem verticalem MO , postoque ut supra $MO = f$ et $AO = g$, fit abscissa $MT = z$ et applicata $TY = u$, et quoniam in puncto supremo M est $p = 0$, erit $2bf - ff = \alpha\alpha K$; et cum sit $x = g - u$ et

$$y =$$

$y = f - t$, his valoribus introductis erit

$$du = \frac{dt \sqrt{K}}{\sqrt{2by - yy - 2by + yy}} = \frac{dt \sqrt{K}}{\sqrt{2b(f-y) - (f-y)(f+y)}}.$$

Est vero $f - y = t$ et $f + y = 2f - t$, vnde fit

$$du = \frac{dt \sqrt{K}}{\sqrt{2bt - t(2f - t)}} = \frac{dt \sqrt{K'}}{\sqrt{2at + tt}},$$

existente $a = b - f$, haecque aequatio iterum est procurua ex familia catenariarum, quae autem non erit rectificabilis, nisi fuerit $\sqrt{K} = b - f = a$, qui casus cum secundo conuenit.

Ceterum ex iis quae supra §. 19. ad finem allata sunt facile perspicitur, hoc casu fore,

$$u = \sqrt{K} \cdot l \frac{a + t + \sqrt{2at + tt}}{a} \quad \text{et} \quad t = a \frac{(e^{\frac{u}{\sqrt{K}}} - 1)^2}{2e^{\frac{u}{\sqrt{K}}}}.$$

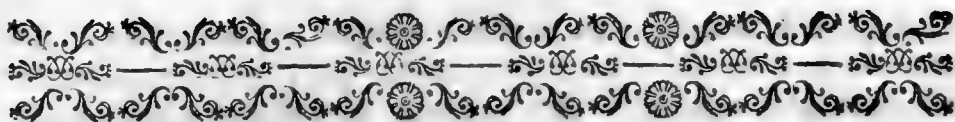
P H Y S I C A.

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I.

Eo

LY.

1012743



LYCIA HYBRIDA.

Auctore

I. T. KOELREYTER.

EXPERIMENTVM I.

Lycium barbarum, ♀.

Lycium afrum, ♂.

An. 1766. d. 11 Iul. et seq. Flor. plur.

Vid. Exper. inuers. VII.

Inter frutices arborescentes hic primus est hybridus. Generatio eius, si ♀ in fertiliori solo ac sub dio vigeat, prospere satis succedit, rarius autem, si in ollam transplantata est. Semina d. 10 April 1767, in fimetum facta post octiduum copiose progerminabant. Frutices inde prognati plurimi vtrumque parentem incremento praecoci adeo superabant, vt prima iam aestate floruerint egregie, novemque pedum altitudinem attigerint, cum *Lycia barbara* eiusdem aetatis vix duos cum dimidio aequarent, florumque nē vestigium quidem proderent. Subsequenti etiam anno iam Maji initio novis iterum superbiebant floribus,

ribus, quo tempore ne barbara quidem, multo minus a-
fra, florere solent. Idem an. 1768 et 1770, sub iisdem
circumstantiis euenit. Ita quoque copiosissimo per totam
aestatem florum prouentu vtraque longe antecellebant.

Descriptio.

CAVLIS multo altior ac crassior, quam ♀ et ♂; rigidior
idem, magisque aculeatus, quam ♀, at flexilior
longe, leuiorisque armaturae, quam ♂.

FOLIA lineari-lanceolata; minora ac tenuiora, quam ♀,
maiora ac crassiora, quam ♂.

CALYX maior, longior, amplior ac obscurius virescens,
quam ♀; minor, breuior, angustior atque pallidi-
or, quam ♂.

COROLLA infundibuliformis, violacea: maior. quam ♀,
minor vero, quam ♂. Matris autem corolla ad
rotatam, patris ad cylindraceam magis accedit;
color illius ex rubicundo violaceus, pallidissimus,
huius e violaceo purpureus, obscurissimus. Ita quo-
que laciniae corollae ♀ inter longas et angustas si-
ue ellipticas ♀, ac perbreues, latas ac obtusas ♂,
medium quasi tenent.

STAMINA violacea, pallidula; longiora, quam ♀, at bre-
uiora, quam ♂.

PISTILLVM mediae inter ♀ et ♂ magnitudinis ac formae.

PERICARPIVM: Bacca rarior, miniacea, paene cylindracea
siue obtuse oualis, bilocularis, fero demum autum-

no matura. Semen vnum alterumue tantum in quouis loculo, vel etiam nullum. Bacca ♀ ovato-oblonga, ♂ subrotunda.

Pedunculi florum 5^{'''} longi. Longitudo totius floris, a basi calycis vsque ad laciniarum corollae angulos 6¹/₂^{'''}. Amplitudo floris ab vno lacinae angulo ad alterum oppositum 4^{'''}. Latitudo laciniarum corollae 3^{'''}; longitudo earundem 2¹/₂^{'''}.

Hyemes nostrates (†), nisi solito asperiores sint, aequae fere fert, ac barbarum, cum afri natura iis nunquam assuescat. Turionibus ac resectis stirpis ramulis facile propagatur.

EXPERIMENTVM II.

Lycium { barbarum. ♀.
 { afrum. ♂.

Sem. An. 1769. sponte nata.

Ex his feminibus, an. 1770. ortae sunt plantae sex, quarum pleraeque patri naturali foliis angustioribus iam multo similiores, quam sub priori ipsarum statu hybrido, adeoque tenerae erant, vt proxima hyeme sub dio, ante florescentiam, perierint omnes.

E e 3

EXPE-

(*) De regione Carlsruhensi in Suevia intelligendus est Cl. Auctor, vbi experimenta instituta sunt.

EXPERIMENTVM III.

Lycium { barbarum. ♀. } ♀,
 { afrum. ♂. } ♂.

Lycium afrum. ♂.

An. 1768. d. 15. Mai. et seq. Flor. plur.

Idem fere habitus plantarum duarum an. 1769.
inde prognatarum, eademque fors, qualis priorum Exp. II.

EXPERIMENTVM IV.

Lycium afrum. ♀.

Lycium europ. ♂.

An. 1773. d. 14. Iun. Flor. 5.

Vid. Exp. inuers. V.

Plantae duae, hoc experimento an. 1774. plures-
que aliae, an. 1778 enatae, inter vtrumque parentem ex-
acte medium tenebant.

EXPERIMENTVM V.

Lycium europ. ♀.

Lycium afrum. ♂.

An. 1773. d. 17. Iun. Flor. 3.

Vid. Exp. inuers. IV.

Plantae duae, an. 1774 inde procreatae, prioribus
Exp. IV. simillimae erant.

EXPERIMENTVM VI.

Lycium barbar. ♀.

Lycium europ. ♂.

An.

An. 1773. d. 13. Iul. Flor. pauci.

Vid. Exp. inuerf. IX.

E paucissimis feminibus, an. 1774. vnicus tantum exortus est frutex, qui vtrumque parentem ex toto simu-
labat.

Copulationes Lyciorum aliae frustra huc
vsque tentatae.

EXPERIMENTVM VII.

Lycium afrum. ♀.

Lycium barbar. ♂.

An. 1766. d. 18. Iul. Flor. 2.

it. An. 1768. d. 6. Aug. Flor. 15.

it. An. 1772. d. 25. Aug.

et seq. Flor. 20.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerf. I.

EXPERIMENTVM VIII.

Lycium { barbar. ♀. }
 { afrum ♂. } ♀.

Lycium europ. ♂.

An. 1771. d. 14. Sept.

Flor. plur.

Conceptio nulla.

EXPERIMENTVM IX.

Lycium europ. ♀.

Lycium barbar. ♂.

An.

An. 1771. d. 25. Sept. Flor. I.

Conceptio nulla.

Vid. Exp. inuerv. VI.

EXPERIMENTVM IX.

Lycium barbar. ♀.

Solan. Pseudocaps. ♂.

An. 1766. d. 1. Aug. F. II. IV

Conceptio nulla.

Explicatio Figurarum.

Tab. VI.

- A. Lycii { barbari. ♀. } ramulus floridus.
- afri. ♂.
- B. Calyx dissectus ac explicatus.
- C. Corollae facies anterior.
- D. Corollae facies posterior.
- E. Corolla secundum longitudinem dissecta, cum flami-
nibus.
- F. Pistillum.
- G. Bacca.

DE
CONFERVAE NATURA,
DISQVISITIO CHEMICA.

Auctore
I. G. GEORGI.

Postquam *Peysonelli* inuentum de Lithophytis ad animalia referendis consensu et applausu celebrari coepit, pluribus inter recentiores naturae scrutatores contigit in aliis quoque generibus corporum organicorum, quae ad Cryptogamas plantas olim ab Ill. Equite a *Linne* referebantur, obseruasse sensum vitalem, motum spontaneum, et cum aemula Hydrae sic dictae seu Polypi natura (gemmaſcendi et per sectionem corporis in partes multiplicandi) alias quoque regni animalis proprietates; quibus permoti ea non pro ambiguis et intermediis, sed pro veris animantibus declarare haud dubitarunt. Contra alii hodiernum argumenta fatis numerosa protulerunt, quibus dubia ista genera ad regnum vegetabile esse referenda, imo pro imperfectis potius plantis habenda, sibi persuadent.

Aliqui ex vtraque dissentientium cohorte inter regnum animale et vegetabile tantum ponunt analogiae, tot enumerant affinitatum momenta, quibus vtrumque hoc regnum retis fere instar cohaeret; ut distinctiuos vtriusque

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I. F f Reg-

Regni characteres externos haud sufficere, sed corpora vni-
 versa globi nostri terraquei non in *tria regna*, sed in *duo*
 tantum dispescenda esse statuunt, quarum vnum vniuersum
 corporum organicorum, vegetabilis et animalis naturae,
 apparatus, alterum corpora bruta vel mineralia compre-
 hendat; Organicorum vero corporum in duo Regna sub-
 diuisionem, licet pro methodo vtilem, non tamen ab ipsa
 natura institutam docent.

Chemia potuisset litem dirimere, nisi eius quoque
 opera ex vtriusque naturae regni corporibus, educta et
 producta analogae, principia admodum affinia, eademque
 basis terrea e minerali regno assumpta, cum aquea parte
 prodirent; vnde plantarum et corporum animalium analy-
 ses chemicae vt plurimum steriles obtinentur.

Attamen similitudo ista non tanta est, vt non che-
 mia satis multa inter animalia et plantas, ex iis praefer-
 tim classibus, quae non ambiguae sunt naturae, differentiae
 momenta detegat; sic in vegetabilibus omnibus tendentia
 ad acescendum, fermentatio spiritiuosa et acida, alcali fixum
 vegetabile; dein mucilaginum eductorum acescencia, resi-
 nae, gummi-resinae, olea essentialia cum rectore, cera,
 camphorae, peculiare constituunt characteres. Animali
 contra regno propria: putrescentia alcalina, nulla fermen-
 tatione spiritiuosa acidoque praeuia, alcali volatile sub de-
 structionem omnis ex hoc regno substantiae, (non excepta
 gelatina, lacte et adipe, ad vegetabilem naturam propius
 accedentibus) generatum, et sal ammoniacalis; deficienti-
 bus simul oleis essentialibus, camphora, cera et praeter
 paucas exceptiones, etiam resina.

Haec

Haec me adduxerunt vt, licet Naturae Myftarum lites componendo imparem me sentiam, ambiguum corporum aliqua chemicae analyfi subiicerem, praefertim quum pauca eorum hucusque chemice illustrata fuerint. Conftabit inde faltem cuinam Naturae regno, quoad mixturem, fint analoga. Dabo hic primum vulgaris Conferuae riularis et lacustris L. analyfin, quae licet motu vitali ab *Adanfonia* et Abbate *Corti* in alia specie obferuato haud gaudeant, tamen vti externa fimilitudine, ita et principiorum chemicorum natura ifti confentire, faltem proxime videbuntur.

Conferuas pro experimentis adhibitas, riularem et lacustrem Augufto mense in ripa arenofa oftii Neuae fluuii, recedente aqua, promiscue collegi. Arena subtilis alba quafi inferta videbatur, neque repetita lotionem, ficcasse Conferuas concifas in cribro agitando plane separari potuit. Odor recentis et dum ficcabatur, quod etiam in hypocausto nonnifi lente factum est, palustris fuit, licet in puriffima aqua creuerat; isque odor ne in ficca quidem penitus abfuit.

Conferua recens vel ficcata commanducantis fauiliam virescente imbuere colore, gustui fenfum vix vllum excitans, et filamenta exsucca, tenacia fatis relinquit. Siccata ad candelam facile comburitur, at sine flamma, empireuma volatile fimul fpargens. Librae quatuor recentis, ex aqua destillatae, phlegma infipidum, odore paludoso, nullumque olei veltigium dedere.

Siccatae Conferuae vnciae duae cum aqua iterato ebullientes, decoctum praebuerunt virescens, limpdatum

subacidulo fere gustu; quod evaporatione ad decem drachmas coactum, extracti formam habuit, consistentia mellis, gustu vix amarum; quod, per quatuor et ultra menses asseruatum, nihil salini crystallifabilis exhibuit, licet reagentia aliquid salis muriatici adesse testarentur. Residuum a coctura filamentis satis tenacibus, viridiusculis constat, quorum massa ficcata vnciam cum duabus drachmis efficit, et ad candelam viuida cum flamma, sine fumo vilo, comburitur.

Vncia Conferuae ficcatae in spiritu vini alcoholisato extracta, infusione pulcre viridem colorem liquido praebuit, digestionem saturatum. Tinctura sic parata gratum amarorem prodidit; qua evaporata et abluto residuo, octodecim grana resinae vegetabilis nigrescentis, siccae superfuerunt, quae alba cum flamma incenditur, simul liquatur et odorem gratum spargit. Conferuae sic extractae residuum ficcatum, fuit sex drachmarum, fragilis atque fuscae substantiae.

Vnciae octo Conferuae ab adhaerente arena quantum fieri potuit depuratae, destillatione ex retorta vitrea sequentia producta largiebantur:

1. Phlegmatis limpidi, insipidi, paludem redolentis vnciam vnam.

2. Phlegmatis empireumatici, primum flavescentis, deinde saturatioris, collectim vnciam cum drachmis sex.

3. Olei

3. Olei empireumatici nigrescentis atque satis cras-
si drachmam sesquiertiam; quod vero huius olei in re-
tortae recipientis collo adhaeserat adustum, tantundem vi-
debatur ponderis aequasse.

4. Residuum destillationis carbonaceum, puluerulen-
tum, vnciarum trium cum dimidia fuit.

Salis volatilis ficci nihil omnino apparuit, licet
vasis recipientibus saepius permutatis, semperque luto be-
ne munitis; odor tamen phlegmatis cum oleo destillantis
aliquantum volatilis visus est.

Phlegma N°. 2. addito alcali deliquato lactescit,
odoremque vrinofum, sed leuissimum prodidit; quiete de-
inde fecedit oleum ex hoc phlegmate nigrescens.

Cum acidis nihil mutatur idem; ab oleo tamen
separatum aliquantum acidis mouetur et odorem vrinofum
amittet.

Cretae solutio in acido nitri hoc eodem phlegma-
te haud praecipitatur; mercurius eodem acido dilutus sta-
tim, et argentum post aliquod horas fusci sedimenti for-
ma deiicitur.

Hepar sulphuris, digestionem cum oleo tartari deli-
quati paratum, statim cum foetore turbatur, flauumque
sedimentum deponit.

Tincturae Heliotropii aquosae mixtum phlegma
laete rubrum colorem illico inducit, eundemque colorem

chartae ista coloratae tinctura ex eodem assumunt. Quae vero ligno Fernambucano et radice Curcumae tinctae sunt chartae, nihil inde mutantur.

Caput mortuum, satis ponderosum, ab arena tamen immixta separari non poterat. In crucibulo calcinatum in cineres rubescentes et satis ponderosos transit, qui aqua bulliente abluti, drachmas sex cinerum leuiorum eiusdem coloris praebuerunt, reliquo pondere per depositam arenam amisso.

Aqua, in qua eloti fuerant cineres filtrata, euaporatione reliquit salis rufescentis quindecim grana, lamellarum forma, cum immixtis tesseriis minutis. Hic sal gustu culinarem, cum amarore iuncta, refert, aëris humore non deliquescit, in igne crepitat sine odore sulphureo, cum acidis parum feruet, argentum in acido nitri solutum floccorum specie delicit. Vt itaque pro *sale culinari*, nimio alcali onusto habendus sit, cuius pars, vi ignis amisso acido, alcalinam illam mixturam produxisse videtur.

Vt cineres et terream basin Conseruae penitus scrutarer, iterum uncias eius octo, quantum poterat fieri depuratae, in crucibulo ignito successiue combusti. Succendebatur flamma lenta, depressa, violacea, comite fumo spisso, odoris aliquantum volatilis. Carbo levis, multo citius, quam qui a combustis agaricis obtinetur, in cineres rufescentes, grauiores abiit, quorum pondus fuit duarum et semis unciarum, cum immixta scilicet arena, quae inter dentes aperte stridebat. Hac dein lotione segregata, sal ex adhibita aqua prodiit simillimus illi, quem

ex

ex capite mortuo descripsi, culinaris nempe, cum tantillo alcali mineralis non saturati. Eiusque pondus vniuersum septendecim fuit granorum.

Leues *cineres* lotionem depuratos, ficcatosque calcinaui. Subtilissimi videntur, et particulas satis multas continent ferreas, magneti adhaerescences, praesertim post praeniam cum sebo vitionem. Gallarum quoque infusum inde nigrescit; sed cum acidis cineres isti vix quidquam mouentur.

Semidrachma horum cinerum, cum drachma salis tartari et dimidia boracis facile funditur in vitrum impurum seu scoriam virescentis coloris, quae aëri exposita humescit sensim, fit nigra, tandemque fere deliquescit. Hac feruenti aqua soluta, grana octodecim terrae nigrae, aliquantum vitrificatae superfuerunt; solutio vero limpida, sine vlllo colore apparuit. Huic si affundas acidum vitrioli, sub efferuentiam insignis surgit hepatis sulphuris foetor, et sensim aucta acidi proportionem color viridis magisque saturatus oritur, seruata tamen limpiditate liquoris adusque saturationem; qua perfecta, turbatur et sedimentum ponit, quod tamen denuo ex parte resoluitur, superstita post elixuationem exigua (granor. sex) quantitate terrae filiceae, dilute coeruleae.

Liquor acido saturatus euaporatione generat crystallos exiguas, depressas, partim polyedras, perfecte hyalinas, in ore difficillime solubiles, subamaricantes, in igne cum crepitatione dissilientes, quae spatiosae naturae esse videbantur. Vltiore euaporatione producuntur crystalli

stalli tartaro vitriolato et alumine mixtae, quae ex parte in phialae pariete dendritica forma concresecunt.

Drachma cinerum depuratorum in vncia spiritus vitrioli digesta, eundem nullo colore tinxit. Liquor post colaturam, vt et aqua quibus cineres abluti fuerunt, acidum et stypticum saporis sensum excitabant, et ablutio cinerum, licet seruida instituta, multam aquam requirebat. Residuum scrupulos duos pondere superauit. Liquori acido atque styptico, qui limpidus manserat, aliquantum alcali fixi soluti, sed nequaquam ad saturationem, adfusus est, cuius efferuescentia viridem excitauit colorem, et terrei aliquantum, seliniticae, vt videtur, naturae praecipitauit. Euaporatione deinde instituta insignes crysalli virides, pellucidae oriebantur: verum scilicet alumen, acido superabundante foetum; simul apparuere parvulae crysalli, paruaque copia et albo colore, quae tartari vitriolati characteres ferebant. In hoc experimento viridis ille color, et nigrescentia liquoris cum tinctura gal-larum, indicabat acidum vitrioli simul cum terra aluminari particulas ferreas in cineribus contentas soluisse.

Semidrachma cinerum cum quinque drachmis Spir. nitri digesta, e filtrato liquore, post saturationem ope Alkali fixi institutam, sedimentum calcareum album proiecit, cuius pars aliqua denique resoluta fuit, vt residuum siccatum trium modo granorum pondus aequaret.

Itaque libra (sexdecim vnciarum) Conseruae lacustris et flumiatilis exsiccatae, quae recens ex aqua educta, obiterque expressa quatuor fere librarum pondus efficit, per

per analysin nostram, subducta arena adhaerente haec circiter principia continet:

Phlegmatis partim aquei puri, partim empyreumatici, addito, quod in extracto aquoso remanet circiter . . . vnc. viij.
 Extracti aquosi mucilaginosi post exsiccationem . vnc. vj.
 Resinae vegetabilis circiter drach. v.
 Phlegmatis aciduli empyreumatici, supra . . . vnc. iij.
 Alkali volatilis aciditate absorpti vestigium.
 Olei empyreumatici, ultra fescunciam
 Cinerum carbonaceorum sine arena, circiter . vnc. v.
 Cinerum teneriorum fere vnc. ij.
 In iisque Sal. culinaris ex parte in alcalinam indolem decompositi, vsque ad . . scrup. ij.
 Cum terrae vitrescibilis, aluminaris, calcareae et principii ferrei mixtura.

Nihil ergo olei essentialis aliorumue salium; omniaque principia vegetabilis naturae, nullis animali regno peculiaribus admixtis.



DESCRIPTIO
VESICVLAE FELLEAE TIGRIDIS,
EIVSQVE
CVM LEONINA ET HVMANA COMPARATIO.

Auctore

C. F. WOLFF.

Insignem omnino in plerarumque partium structura similitudinem inter tigrim et leonem reperi; multa tamen haud parui momenti diuersa quoque in vtroque hoc animali inueniuntur; atque inter ea imprimis vesicula fellea referenda esse videtur. Ea enim quamuis in iis etiam in vtroque animali conueniat, quae maxime singularia in leonina obseruabantur, (*) et quibus haec ab humana et plerorumque animalium caeterorum vesiculis diuersa est, tamen non desunt quoque varia in ipsa hac singulari structura, quibus vesicula leonis a tigridis vesicula differt.

Hepar in tigri sex lobis constat oblongis, plane ad marginem vsque postremum a se inuicem separatis, nec nisi paruis portionibus carnis hepaticae inter se cohaerentibus. Horum qui dexterior medius, idemque et caeteris maior, iterum incisus est, atque in duas diuisus portio-

(*) Vide Commentar. nouor. Tom. XIX. Dissert. De structura interna vesiculae felleae leonis.

tiones. Inter quas vesicula fellea ea ratione haeret, vt solo fundo suo et libera fit ab adhaesione, et antèrìus prae hepate emineat, toto reliquo corpore autem inter binas istas portiones, ipsaque in carne hepatis immersa, haereat.

Ab ea leonina structura recedit, propiusque multo accedit ad humanam. In leone nimirum aequè atque in homine vesicula fellis superfìciei inferiori hepatis applicata est, eiusque communi tunica externa simplici obducta. Quo fundus non modo, sed totum vesiculae corpus, et ipsum collum quoque, in inuerso hepate protinus in conspectum veniunt. Attamen sunt quaedam in ipso hoc leoninae vesiculae situ, quibus haec aliquomodo ad tigridis vesiculam inclinare, atque medium quasi locum inter eam et humanam obtinere videtur. Ligamenta dantur peculiarìa in vesicula leonis, quae ex tunica eius externa duplicata orta vtrinque de medio corpore exeunt, et ad superfìciem hepatis se applicant, firmiterque eidem adhaerent. His media pars vesiculae arctius ad hepar adstringitur, eoque efficitur planior, vt vix in hac sede de superfìcie hepatis emineat; cum contra in partibus, fundo et collo propioribus, tumida sit vesicula atque inflata. Humanam constat vbique aequaliter tumere, totaque sua superfìcie inferiori puluinata ad collum vsque liberam esse ab omni adhaesione. Sic tigridis ergo et leonis vesiculae arctius et ligamentis fortioribus ad hepata sua alligata atque adstricta esse videntur.

Figura his tribus vesiculis fere eadem est, oblonga et fere pyriformis; neque videtur in caeteris quoque ani-

malibus quadrupedibus, quorum hepar vesicula instructum est, valde ab ea figura differre. Incipit in omnibus ex ductu angustiori, quem cysticum dicunt; inde continuo magis magisque amplitudine augetur, et finitur fundo clauso inflato, qui partibus reliquis omnibus largior est. Haec, ni fallor, notissima vesiculae felleae figura communis est animalibus, quae eam habent, omnibus; nisi forte paulo angustior in aliis proportionem et longior, in aliis largior et breuior inueniatur. Aliquid tamen in leonina, cum hanc obseruarem, reperi peculiare respectu figurae, quo se ab humana et a reliquorum, quantum scio, animalium vesiculis distingueret. Non recta extensus est sacculus; sed variis in sedibus vno alteroue latere inflexus, quo tunicae, quibus vesicula efficitur, duplicatae introrsum in cavitatem ducuntur, septaque producunt latiora, aut angustiora, quibus in loculamenta quasi varia vesicula diuiditur. Circa partem imprimis posteriorem eiusmodi inflexiones in vesicula leonina obseruantur; solentque alternatim vtrinque posita esse, quo ductum quasi serpentinum vesicula in his regionibus imitari videtur. Similis ergo et tigridis vesiculae figura atque fabrica est.

Deinde haec quasi torta simul esse videtur, cuius in superficie, ab hepate auersa, rugae et crenae satis profundae apparent, quae a margine dextro oblique antrorsum ad fundum vesiculae et sinistrorsum ad partem sinistram decurrunt, vel a sinistro eius latere incipiunt atque in dextrum oblique retrorsum transeunt. Maxima pars harum inflexionum obliquarum et torsionum posteriorem vesiculae partem occupat. Quaedam tamen earum super vniuersam fere vesiculam et ad fundum vsque continuantur.

tur. Vna tandem eiusmodi inflexio est, quae inter reli-
quas notari meretur, et qua vesicula tigridis a leonis vesi-
cula aequae atque obliquitate inflexionum et torsionibus se
distinguit. Prope fundum ea est, duciturque praeter mo-
rem caeterarum transuersim circa vesiculam, eamque in
hac sede quasi constringit, quo, quae reliqua est, eius pars
ad fundum vsque, extenditur tumidiorque atque inflata esse
videtur. Ad eandem hanc sedem vsque, vbi vesicula con-
stringitur, immerfa haec quoque est, et abscondita inter
lobos hepatis. Quae vltra constrictionem autem superest
eius pars caeteris magis inflata, ea sola et libera est ab
adhaesione et prae hepate anterieus eminet. Sic ista pars
situ figura et magnitudine distincta tota in vesicula tigris
fundus appellari meretur.

Vesicula fellea hominis tota aequalis est et aequa-
liter extensa in superficie sua exteriori seu inferiori. In
solo fine posteriori, vbi vesicula esse desinit et ductus fieri
incipit, vel etiam in collo vesiculae, vna et altera leuior
curuatura obseruari solet. Ductus autem cysticus ipse va-
riis in homine inflexionibus et curuaturis omnino notatur;
vt spiralem quoque ei figuram nonnulli anatomicorum ad-
scripserint.

Ligamentis tigridis vesicula tribus gaudet teretibus,
quibus ad hepar reuincitur. Haec membranis latioribus,
ex tunica vesiculae externa continuatis, obducuntur et in-
voluntur, cum iisque ad hepar se applicant; quemadmo-
dum vteri ligamenta teretia in alis vespertilionum conti-
nentur, in iisque ad latera peluis feruntur. Crassa sunt et
robusta haec ligamenta teretia et duplicatura tunicae ex-

ternae vesiculae efficiuntur, in qua densa et dura cellulosa tela continetur. Duo eorum lateralialia sunt et anteriora, tertium posterius et longitudinale seu obliquum. Hoc in ea sede vesiculam tenet, vbi pars eius maxime plicata et torta definit, inter eam et mediam vesiculae partem, magis aequalem. Tum ita positum est, vt ex media vesiculae superficie retrorsum progrediatur primum, deinde flexum ad partem dextram hepatis adhaerescat.

Anteriora duo teretes funiculi sunt, quae in vna membrana, vtrunque expansa, continentur. Membrana vesiculam in ea ipsa sede complectitur, vbi haec constricta est; inter partem eius mediam aequalem et fundum distinctum. Bina teretia ligamenta vtrunque a se mutuo discedunt, et vesicula iis ad binas lobi hepatici portiones alligatur; inter quas illa quasi abscondita haeret.

Sic patet, vesiculam tigridis in tres partes natura esse diuisam, quarum posterior a ductu cystico incipit et ad ligamentum posterius vsque se extendit. Ea quartam circiter totius vesiculae partem, aut paulo plus eo continet, efficitque ipsam eam regionem, quae intus multis variisque plicis et recessibus insignita est. Altera pars media est, quae inter ligamentum posterius et anteriora continetur, quaeque quasi vnā cum dimidia quartam vesiculae partem efficit. Haec aequalis est externe, et plicis interne caret. Tertia pars anterior et ipsa ea est, quam fundum dixi, quae notabili illa vesiculae constrictione a reliquis posterioribus partibus adeo manifesto distinguitur. Haec ergo ligamenta anteriora inter et extremum finem
vesi-

vesiculae continetur, vnamque quasi quartam longitudinis vesiculae partem efficit.

Leoni duo tantum ligamenta sunt lateralia et transversa, quae mediam fere vesiculam tenent, indeque vtrunque egrediuntur. Diuisio tamen similis in leone atque in tigride obtinet in partem posteriorem, intus plicatam, quae inter collum in leone et ligamenta continetur; in mediam, plicis vacuum, quae ligamenta inter et fundum est, et in fundum ipsum. Humanam vesiculam simplici tunica externa, in externam hepatis tunicam continuata, hepati annexam esse constat; nec aliter nisi in collum corpus et fundum esse diuisam.

Vt fundus autem merito haec pars anterior in tigride dici posse videtur, mediam procul dubio corpus vesiculae, collumque posteriorem appellare recepta inter anatomicos denominatio suadet. Verumenim et ipsa in tigride haec pars vesiculae posterior longa nimis est, nimisque notabilem totius vesiculae partem continet, quam ut ad collum referri possit, vel comparari cum ea minima parte, quae in humana vesicula eo nomine venit, et nimis praeterea similis est haec pars illi, quae in vesicula leonis plicata intus et folliculosa est, similiterque inter ductum cysticum et ligamenta continetur, et quae dimidiam fere in hoc animali totius vesiculae partem efficit. Accedit, quod aliqua huius partis portio in leone detur, cystico ductui proxima, et manifesto distincta, quae merito cum collo vesiculae humanae comparari potest, et quae docet igitur, partem intus plicatam in tigride non minus quam in leone aliam, et maiorem collo, vesiculae partem esse;

esse; et naturam ergo non adeo vsque solitam eam diuisionem curare, vt in omnibus animalibus inueniatur.

Tunicæ, quibus tigridis vesicula constat, pariter atque leoninae, cum iis omnino numero, natura, ordine, conueniunt, quibus humana efficitur. Neque dubito, quin in omnibus animalibus quadrupedibus vesiculæ similibus sint compositæ tunicis. Hoc solum vtrique, leonis et tigridis, vesiculæ præ humana et caeterorum, ni fallor, animalium vesiculis peculiare est, vt variis in sedibus, imprimis in parte posteriori, intus plicata, tunicae interiores varie ab exterioribus secedant interstitiaque efficiant, quæ densa duraque cellulosa replentur. Hinc vesiculæ substantia, imprimis leoninae, in qua tunicae et frequentius et longius a se inuicem secedunt, tres passim et quatuor imo et quinque lineas crassa inuenitur. In humana vesicula tunicae vbique sibi parallelæ, vbique sibi contiguæ sunt, et vniuersa vesicula vbique tenuis, vbique æqualis.

Incisa vesicula fellea tigridis, partem posteriorem, leoninae analogam, ea tamen minorem, plenam reperi plicis, variae figurae et magnitudinis, sinibusque et recessibus, variae pariter indolis. Generatim et plicae et recessus maiores multo in leone, in tigride multo minores sunt; similitudo autem insignis, imprimis inter plicas vtriusque vesiculæ intercedit.

Primum ergo in postrema vesiculæ eaque angustissima parte, qua ex ductu continuatur cystico, moles continuo apparet plicarum conglomeratarum, quæ cauitatem fere vesiculæ in hac sede occupat. Indicaui in descri-

scriptione vesiculae leoninae (Tomo Commentarior. nouor. XIX. pag. 383. 384.) qua ratione et simplices plicae et moles eiusmodi plicarum conglomeratarum efficiantur. Secedit vel neruea tunica vna cum villosa a musculosa, vel ipsa haec posterior cum binis prioribus ab externa vesiculae tunica, et interstitium inter secedentes eamque, quae recta transit, quod oritur, densa crassaque cellulosa repletur. Sic intra vesiculam protuberantia efficitur, quae vesiculae cavitatem, vel aliquam eius partem in ea sede occupat. Tum vero in ipsa protuberantia seu mole, intra vesiculam eminente, interna villosa tunica porro a neruea variis in locis secedit, variasque sui duplicatura plicas producit, quae basibus suis singulae isti protuberantiae insident, marginibusque acutis in cavitatem vesiculae respiciunt. Atque ea ratione omnes plicae istae quasi in vnam molem conglomerantur. Simples autem oriuntur, dum sola villosa a neruea recedit, sui que duplicatura plicas distinctas efficit.

Seriem quasi hae plicae in principio vesiculae inter se efficiunt, quarum prima et secunda transuersim positae marginibus suis acutis retrosum et ductum versus cysticum respiciunt, tertia vero, quarta quintaque et sexta demum, transuersae similiter, acutis marginibus antrorsum ad vesiculam spectant. Simillima series plicarum, in vnam similiter molem conglomeratarum, in leoninae quoque vesiculae principio reperiebatur; modo vt plicae multo maiores in hoc animali essent, magisque a se mutuo distarent, et interstitia loculamentaue maiora efficerent.

Continuo hanc seriem plicarum in tigridis vesicula fouea excipit magna et profunda, elegancia structurae insignis, et vorticis maris simillima. Ea plicis efficitur circularibus aut semicircularibus et concentricis, quarum exteriores maioresque superficiei internae vesiculae aequales sunt, interiores autem et minores, quo propius ad centrum commune accedunt, eo sunt profundius in substantiam vesiculae immerstae. Intimus denique circulus, qui integer est, profundissimam continet speluncam, quasi abyssum.

Post hunc antrorsum alius sequitur eiusmodi vortex, fabrica tamen minus pulchra quam ille prior, et duo alii porro, iuxta se inuicem positi, in parte vesiculae latiori obseruantur. His singulis in media parte fouea profundior est, quae plicis circularibus minoribus, paucioribus pluribusque, circumdatur atque includitur. Interstitium autem inter vortices hos quatuor plicis obtusioribus repletur.

In leone vortices eiusmodi nulli reperiuntur. Sunt autem duo magni et amplissimi folliculi in eo, integerrimi et subrotundi angustoque inter se orificio communicantes. Horum parietes intus plicis transversalibus partim, partimque arcuatis exornantur; atque hi sunt, ad quos vortices tigridis comparaueris, quibusque illi analogi esse videntur.

Denique tota haec pars vesicae posterior in tigride, quae plicis descriptis et vorticibus repleta est, magna sed simplici plica transversali terminatur et a reliqua anteriori

riori parte, quae plicis caret, distinguitur. Similis in leone quoque magna latissima et egregia plica est, qua simili modo pars anterior rugosa a posteriori plicata et folliculosa parte separatur.

Rugis, quae nunc sequitur in tigride ut in leone, tota reliqua vesiculae et maxima pars intus ornatur; plicae vero non porro reperiuntur; excepta vnica insigni simplici, de qua continuo dicam. Rugae retiformes passim vel subretiformes esse videntur. Alibi arcuatim ducuntur; maximam partem autem undulatim se mutuo excipiunt.

In ipsa ea sede, ubi exterius ligamenta anteriora vesiculam tenent, ubi haec constricta esse videtur, quo fundus a corpore vesiculae distinguitur, insignis intus et semipollicem lata plica transversalis haeret, qua ipsa constrictio efficitur, et qua intus cavitates fundi aequae a reliqua vesiculae cavitates distinguitur ac extus ligamenti et constrictione a vesicula fundus. Nullam in ipso leone ad hanc sedem vesiculae plicam, ne minimam quidem, inueni. Simples rugae sunt, quibus ad extremum finem usque vesicula repletur. Et fundus in leone non magis quam in homine terminis notatur, nisi imaginariis et vagis, quibus a corpore distingueretur.

Sic facies est interna vesiculae felleae tigridis. Insignes sunt plicae et satis copiosae, figura singulae similes valvulis semilunaribus vasorum, modo ut non munere verarum valvularum fungantur. At enim cum leoninis si comparantur, parvae esse videntur et paucae et imperfe-

ctae; atque id eo magis, cum adeo figura et situ et positione sint similes illis; quo quasi vesicula tigridis imaginem leoninae imperfectiorem referre videtur.

Similitudo ergo omnino vera quoque existit in hac corporis particula inter tigrim et leonem; quamvis ea ob varias diuersitates interspersas non adeo sit luculenta. Et verus character, quo tigris cum leone ad vnum ordinem redigitur naturalem, vti per omnem procul dubio fabricam corporis diffusus, vesiculae felleae quoque impressus existit.

Aperto ductu cystico, inanem hunc reperi et vacuum plicis et cellulis in tigride aequae ac in leone. Laevis est intus in animali utroque et striis modo longitudinalibus notatus; eminentiis omnino caret.

Contrarium plane in homine observatur, cuius vesicula plicis priuata fere, ductus contra refertissimus est. Sed pulchra haec fabrica humana, quae tam varia in variis biliferorum vasorum partibus, nec cognita plane ac penitus, ut opinor, est, proprio sermone definiri minutius que explicari meretur; idque eo magis, cum antequam iconem huius vesiculae exponam, consultum mihi esse videtur quaedam praemonere de inconstantia fabricae corporis humani generatim, et de eligendis ad illam repraesentandam exemplaribus.

Fig. I.

Tab. VII. Vesicula fellea tigridis integra, ex hepate resecta, figura magnitudine naturali. Situs ut in hepate sursum reflexo.

a. a. b.

- a. a. b.* Fundus, liber a ligamentis et adhaesione, inter lobos hepatis solus eminens, magisque reliquis partibus inflatus.
- b.* Fundi apex, seu finis extremus, qui in situ naturali ante hepar sursum respicit.
- a. a. c. d.* Tota haec pars ligamentis partim, partimque cellulosa hepati non modo adharet, sed latet quoque profundius inter lobos hepatis.
- a. e. c.* Latus ad hepar applicatum.
- a. f. d.* Latus ab hepate auersum.
- a. a. e. f.* Pars vesiculae plicis intus vacua.
- e. f. c. d.* Pars posterior plicis repleta et folliculosa.
- g. h.* Ligamenta anteriora lateralia, membrana inter se connexa, quibus anterior vesiculae pars hepati alligatur. *g* Quod ex latere hoc vesicae, quod representatur, *h* alterum, quod ex opposito vesicae latere, deriuatur.
- i.* Ligamentum posterius longitudinale, quod in latere (*e. c.*) vsque ad diuisionem fere ductus cystici continuabat, et cuius ope haec pars (*e. f. k.*) hepati adhaerebat.
- k.* Ductus cysticus.
- l. m.* Duo ductus hepatici.
- n.* Ductus choledochus.

Fig. II.

Vesicula fellea longitudinali sectione aperta.

a. b. b. Fundi cauitas (fig. I. *a. b. a.*)

- b. b.* Plica magna transversalis semilunaris, qua fundus a corpore distinguitur. Fundus rugis repletus est.
- b. b. c. c.* Pars vesicae anterior, quae plicis similiter caret, et rugis, varie ductis, ornatur.
- c. c.* Plica altera magna semilunaris transversalis, qua pars anterior a posteriori distinguitur.
- c. c. c.* Pars posterior vesicae plicis plena (fig. 1. i. f. c. d.)
- e. f.* Ductus cysticus apertus.
- d. d.* Ligamenta anteriora lateralia ab involuente membrana liberata.
- g. et i.* Ductus hepatici.
- h.* Ductus choledochus.
- k.* Cavitas sub plica (*c.*) reclusa, plicis longitudinalibus repleta.
- l. m.* Substantia vesiculae crassior in his sedibus; eius superficies externa.
- n. n. n. n.* Vortices, seu folliculi plicati, leoninis folliculis analogi; quorum postremus elegantissime structus, bini anteriores autem, iuxta se positi, valde profundi sunt; dum cavitatibus suis et fundis sub partem (*k*) producuntur.
- o.* Series plicarum conglomeratarum quae primum vesiculae principium occupat.
- p.* Lacuna in ductu cystico insignis.

TRES

ONISCORVM SPECIES

DESCRIPTAE.

Ab

I. LEPECHIN.

ONISCVS ACVLEATVS.

Tab.VIII.
Fig. 1.

Oniscus thorace nudo, dorso tribus ordinibus cuspidum notato.

Descriptio.

Longitudo totius animalculi, exceptis antennis, XI. linearum. Caput hemisphericum, oculi magni, protuberantes, coerulei. Os inferius situm in fovea rotundata pone insertionem antennarum, protuberans denticulis quatuor, quorum duo superiores, maxillam efficientes, validiores sunt, instructum. Antennae IV. per paria dispositae: par inferius magis validum quadriarticulatum: articulus capiti proximus brevissimus, secundus longior crassior que complanatus, tertius brevior secundo et debilior, quartus longissimus fetaceus. Thorax semiovatius gibbus, segmentis VI. quorum vnumquodque in medio tuberculo, vix nudo oculo conspicuo, notatur; at in ultimo segmento inferior margo eudentibus cuspidibus armatur; reliquum corpus tribus constat scutis, quorum latera sunt plana in formam semilunae

lunae efficta, in abdomine appendicibus trium parium pediformibus, articulatis, extremo setaceis, instructa; in dorso autem tribus ordinibus cuspidum armata, quorum debiliores medium dorsum, fortiores vero vncinnatae, latera, occupant. Dedes VII. parium, quorum duo anteriora cheiliformia, vncō acuto terminata, breuiora, reliqua longitudine crescunt, ita vt vltimum sit longissimum, quadriarticulatum, femora latiora fere triangularia.

Cauda tribus constat segmentis attenuatis, vbi aculei, ratione ad dorsum habita, sunt debiliores, et tandem in aculeum complanatum, subulatum et firmum exit; reliquam caudam constituunt tria paria appendicum filiformium, quarum extremitates bifidae setaceae. Color totius pulcre cinnabarinus. Locus mare album.

ONISCVS SCORPIOIDES.

Tab.VIII.

Fig. 2.

Oniscus thorace globoso ouato, glabro; cauda elongata; articulata, spina setis que bifidis terminata.

Descriptio.

Curiosum atque singulare animalculum tam ratione structurae suae, quam ratione anomaliae partium. Caput valde exiguum, oculi prominentes approximati. Thorax vndique tegitur scuto globoso ouato transuersis atque semilunaribus rugis notato; ex cuius parte anteriori exeunt appendices duae breues, claudentes caput et antennas, quae sunt IV. breuissimae filiformes. Os inferius situm exiguum, appendiculis IV. setaceis minimis instructum, quae, vti videtur, pro maxillis inseruiunt. Dorsum itidem tegitur scuto, sed

sed molliori in formam conī truncatī, cuius vertex caudam, basis vero thoracem respiciunt; lineis circularibus tribus notatum, quae totidem dorsi segmenta repraesentant. Pedes vtrinque VII; hōrum paria anteriora IV validiora, ex tribus articulis conflata, apice vncinnulo armata, antrorsum versa, et quae pro lubitu animalculi sub margine prominente scuti thoracici tanquam in vagina reconduntur; reliqua pedum paria retrorsum spectant. Cauda longitudinem totius corporis adaequat, tenuis, triquetra, constans articulis V. Horum vltimus medio in aculeum, sat firmum exit, ad latera vero setis longis apice bifidis terminatur. Ad ripas maris albi copiosus. Longitudo totius animalculi X linearum.

ONISCVS CVSPIDATVS.

Tab. VIII
Fig. 2.

Oniscus thorace articulado, tuberculoso, segmentis dorsalibus VI, cuspidatis.

Descriptio.

Caput prominulum a thorace distinctum inaequale, oculis distinctis protuberantibus. Antennae IV, quarum bases constant articulis cylindricis brevioribus, apex vero exit in setam longam attenuatam. Os inferne situm, instructum maxillis hamatis eudentibus. Thorax articulatus oblongus, segmentis IV, quorum vnumquodque tuberculis III, sat eleuatis, medio oblongiore, notatur, vltimum vero segmentum, praeter tubercula, cuspidibus IV dorsum respicientibus instructum. Dorsum et abdomen constant itidem segmentis IV, quae sulcis profundis atque eudentioribus distinguuntur.

margo inferior anteriorum segmentorum armatur cuspidibus VI, ratione magnitudinis corporis, validis, vltimum vero segmentum, non nisi vnicam cuspidem in medio gerit. Cauda in formam penicilli efformatur ex laminibus attenuatis mollioribus. Pedes VII parium, quatuor articulis constantes. Horum anteriores teneriores, hispidi; vltimi vero validiores, femoribus crassioribus, complanatis, spina notatis; abdomen tegunt tria paria appendicum pediformium, basi solidiore sulcata, apice bifido filiformi. Longitudo totius, exceptis antennis, X linearum; color lateritius; locus, mare album.



ANTILOPE SVBGVTTVROSA

DESCRIPTA

Auctore

A. I. GÜLDENSTAEDT.

Peregrinatores quam plurimi, qui Asiam ac Africam visitauerunt, multa de Gazellis seu Antilopibus, quadrupedibus forma elegantissimis, caprino ceruinoque generi affinibus reliquerunt, earumque fragmenta & exuvias museis europæis tradiderunt. Datis hisce insistentes Zoologi systematici species varias numerosissimæ huius familiae determinandi ac auctores veteres neotericosque conciliandi studio flagrauerunt, infelici autem semper successu. Tandem illustriss. Comes de *Buffon*, in Tomo 12^{mo} *hystoriae naturalis* tenebras has, cognitionem horum animalium impediētes dissipare, novamque lucem accendere incoepit, quam postea clariorem reddidit ill. *Pallas*, omnes notas Antilopum seu Gazellarum species systematicorum more, in *primo fasciculo spicilegiorum zoologicorum* exponens atque distinguens, easdemque, post nouissimas curas ill. *Pennant*, de hac quadrupedum stirpe (vid. *Ej. synopsis of Quadrupeds*) praeclare meriti, in *duodecimo fasciculo* in insigne *Scientiae naturalis incrementum* retrahens.

Zoologos hosce celeberrimos in speciebus Antilopum determinandis. nec. sinimetipsis. ubique. satisfacere, nec inter se. convenire, nemini mirum videbitur, qui norit, quam paucas integras viderint, quamque pauciores adhuc disseccaverint. Errores leousque inevitabiles erunt, donec exstebunt icones, descriptiones, dimensiones atque anatomiae singularum, quales omnibus numeris absolutas ill. *Pallas*, de Antilope Cernicapra (vid. fasc. 1. *spicil. zool.*) atque de Antilope gutturosa & Saiga (vid. fasc. 12.) physiophilis communicavit. Reliquae, quas huc usque possidemus, notitiae plerumque adeo incompletae sunt, ut minime sufficiant, ad distinguendas species huius generis arctiori affinitate cognatas.

Hanc difficultatem praesertim expertus sum confrens *Gazellam* (*Histor. nat. Tom. 12, Tab. 23*), *Kenellam* (l. c. *Tab. 26*) atque *Corinnam* (l. c. *Tab. 27*) *Buffonii*, cum illa Antilope, quae campos ad australem caucasi pedem inter mare nigrum & caspium inhabitat, quam interim subgutturosam appello. Descriptiones horum animalium, quas ill. *Daubenton* disquisitionibus criticis *Buffonianis* l. c. addidit, ob defectum individuorum integrorum valdopere mancae sunt; nec ullam anatomicam expositionem, si *Corinnae* ventriculos excipias, subministrant; nec dimensiones animalis iustas, sed ad exemplar effarctum taliter qualiter factas indicant; hinc ex illis nihil cum certitudine deduci potest. Nam omnes fere notae istorum trium animalium competunt etiam nostrae *Antilopi subgutturosaе*, cornuum magnitudine, ac faciei & reliqui corporis colore, pro aetate varia, haud parum varianti; de qualitatibus autem, quas prius habet nostra, ignora-

ignoratur, an his animalia illa tria *Buffoniana* careant ex naturae decreto, an tantum per accidens.

Ad inopias has litterarias remouendas, atque ad facilitandam specierum affinium distinctionem, decreui amplam ac iconibus dimensionibusque illustratam externarum internarumque partium Antilopis subgutturofae descriptionem naturae scrutatoribus tradere, qualem splendidissima *CATHIRINAE MAGNAE* munificentia stipatus per Georgiam peregrinator, ex indiuiduis quinque adultis masculis, iussu *serenissimi* HERACLII, per Cardueliam & Cachetiam regis, mihi mente Ianuario anni 1772 Tessili oblati concinnaui, quo in posterum gnari, Arabiam & Palaestinam, atque Africam septentrionalem visitantes, Antilopes seu Gazellas illis terris proprias cum nostra conferre, atque conuenientiam seu diuersitatem absque haesitatione eruere possint. Sed antequam ad descriptionem accedam, liceat quaedam de nomine, de synonymis, ac de qualitatibus animalis nostri praemittere.

Antilope haec subgutturosa dicitur, quia caput laryngis in collo eximie prominet, tantum non adeo ac in Antilope gutturosa *Pallasii*, (vid. *Ej. spicil. zool. fasc. 12, Tab. 2*), quae *Caprea gutturosa* *L. G. Gmelini* (vid. *Nov. Comment. Petrop. Tom. V. Tab. 9.*).

Antilope subgutturosa mox describenda communi linguis armenae, georgianae, tataricae, turcicae & persicae, in prouinciis inter mare nigrum & caspium sitis, nomine *Dschairan* (джанранъ) appellatur, a quo *Dseren*, nomen a Mongolis & Russis in *Dauria* Antilopi guttu-

rosae impositum vix differt. Hac nominum barbarorum analogia deceptus *S. G. Gmelinus*, Dschairan Persarum, quem gregatim eminus in via a Baku ad Schamachiam viderat, et habitu fidens pro Cervo Capreolo vix declarauerat, alteri errori obnoxius pro Dsèren Mongolorum seu pro Caprea gutturosa patruī sui *I. G. Gmelini* nimis praecipitanter declarauit (vid. *S. G. Gmelini Itiner. Tom. 3. pag. 58.*). Antilope seu Caprea gutturosa differt autem eidentissime ab Antilope subgutturosa: cornubus minoribus, lutescentibus, aliter flexis; colore capitis & trunci vniiformi, non fasciato; area anali alba vltra caudam extensa; cauda griseo-fuscescente; finu circa praeputium grumoso; gutture multo eminentiori, seu cartilagine thyreoidea maiore; scoparum in genubus defectu. Haec *S. G. Gmelini* hallucinatio eo magis releuanda est, ne credatur, Antilopem gutturosam *Pall.* ad occidentem maris caspii peruenire, a quo longissime distat. Iam certo certius ex commilitonibus *S. G. Gmelini* scio, illum nunquam Dschairan Persarum seu nostram Antilopem subgutturosam coram habuisse, sed ceu animal ex illius sententia fat notum neglexisse. Eiusdem fere incuriae reus est *Kämpferus*, in *Amoenitatibus academicis* animal Persis Ahu dictum pag. 407 *icone 1* repraesentans et pag. 403 ita describens, vt icon vix recognosci queat. *Icon Kämpferiana* quanquam rudissima fat accedit ad Antilopem subgutturosam, cui forte male nomen Ahu adpositum; nam Persae Antilopem, Dschairan appellant; Ahu autem illorum, rectius pro Cervo Capreolo caudato haberi debet, quem *S. G. Gmelin* in *Tomo tertio Itinerarii germanici* p. 496 ex individuo iuniori in prouincia Gilan obtento descripsit, de quo iterum mihi ex commilitonibus illius constat, quod

non

non altissimos montes, sed tantum loca submontosa sylvatica, ut Cervi solent, occupet. De reliquis synonymis, quae minus proprie ad me pertinent, eo lubentius taceam, cum iam opus egregium meritissimi Göttingensium professoris, praematura eheu! morte orbi litterato erepti, *Erxlebeni classis mammalium*, locupletissima synonymia abundans exstet, quod curiosi etiam in Antilopum genere cum emolumento consulent.

Patria Antilopes subgutturosa Persia est. Inter mare caspium & nigrum septentrionem versus usque ad pedem australem promontorii iugi alpini caucasici, vix ultra gradum latitudinis 42 procedit. Ad Cyrum fluvium ab ostio usque ad confinia metropolis georgicae *Teflis* in campis apricis, & planis, & collibus obsitis, sat frequens est, sylvas omnino respuens. Ex variis traditionibus accepi, eandem occidentem versus usque ad Constantinopolin, austrum versus usque ad Ispahanum, orientemque versus usque ad Buchariam omnes regiones apricas occupare. Gregatim incedit semper, celerrimi cursus terrefacta. Per scopetum ex insidiis vulgo per venatores occiditur. Odor animalis recenter mortui nullus. Caro sapida, experita. Pro pabulo sibi eligit herbas aromaticas, amaricantes, praesertim Absinthium ponticum, quorum rumen repletum inueni. Parit per Maium, teste haedillo neonato, quem medio Maii circa *Teflisum*, hominum manibus captum, obtinui.

DESCRIPTIO

Antilopes subgutturofae.

Tab. IX. *Imaginem animalis, magnitudine naturali octuplo minorem, Tabula IX. fittit. Statura, magnitudine, trunci coloribus, pilorumque habitu maximopere accedit ad Cervum Capreolum ecaudatum, quem simul occisum coram habui; sed caput diuersissimum, quoad cornua praesertim. Nasus rectus obtusus, naribus linearibus, diuergentibus, nudis, nigris terminatus. Rictus oris angustus, terminalis; labiis strictis, nudis, nigricantibus, inferiore aliquantum breuiore. Mentum imberbe. Mystaces ad latera nasi brevissimae, detritae, paucae. Oculi laterales magni, nigricantes; membrana nyctitante ad angulum anticum albida; palpebris strictis, margine nudis, atris; pilis breuibus, raris in medio palpebrae vtriusque, & setis pluribus, brevibus in verruca supraoculari. Sinus lacrymalis oblongus, a cantho antico deorsum descendens, labiis tumidis, nigris, nudis, collabentibus, fundo foraminulis octo maioribus perforato & plurimis minimis, Auriculae elongatae, cylindricae, acutae, erectae, extus pilis brevissimis vestitae; intus liuidae, ordinibus tribus pilorum rigidiusculorum, alborum obsitae, quibus accedunt ordines pilorum duo ad margines auriculae.*

Tab. X. & XI. *Cornua (conf. Tab. X & XI, cranium cum cornubus, magnitudine naturali dimidio minori, sistentes) pedalia, perennia, simplicia, concava, fusco-nigra, striata; basi tantillum compressa, superficie exteriori planiuscula, interiore conuexa, (vt ex fig. 2 Tab. XI patet, quae peripheriam cornu dextri, magnitudine et crassitie naturali repraesentat)*

repraesentat, superficie exteriore per *a*, interiore per *b* et angulo antico per *c* indicatis); apicem versus teretia, apice laeua, ceterum annulata; annulis 14 ad 23 (pro varia longitudine inter 8 & 12 poll. paris.); ad basin approximatis, eminentioribus & horizontalibus; apicem versus remotioribus, obsoletioribus, antrorsum obliquis, nonnunquam retrorsum bifidis; omnibus ad marginem posticum subeuanescentibus. Situs cornuum a basi vsque ad annulum ultimum superiorem sursum & retrorsum tendens atque divergens; sed apices lacues introrsum atque antrorsum curvati.

Collum compressum, elongatum, capite laryngis eidentissime prominulo, quod etiam in mare neonato avellanae magnitudine protuberat.

An etiam *femina* collo gutturoso & capite cornuto gaudeat, affirmare vel negare nequeo, quia nec femineum individuum obtinere, nec ex incolarum relationibus aliquid sat certo comperire potui. Aiunt equidem, feminas cornubus carere.

Truncus oblongus, natibus declinibus, pectore compresso, abdomine stricto; perinaeum latum, vellere vestitum; scrotum longe pendulum, eidenter bilobum, pilosum; praeputium breue, conicum, pariter pilosum, apice nudiusculo nigro; regio inter scrotum & praeputium media nuda, rubicunda, transversalis, in qua *papillae mammales* duae, conicae sitae sunt. Vtrinque ad mammas aliquantum retrorsum, in ipsis regionibus inguinalibus *sinus* dantur *caeci*, ex duplicatura cutis orti, nudi, margine circulari patentes, fundo papilloso mucum grumosum lutescentem, hircino foetore imbutum exsudantes.

Cauda spithamea, basi teres, dein sursum dysticha, compressa.

Pedes graciles subaequales, quorum anteriores antice ad genua *scapis*, seu fasciculo pilorum setaceorum, pollicarium, deorsum pendentium ornati sunt. *Vngulae* in quolibet pede duae, pyramidatae, basi ligamento semipollicem lato connexae, quod retrorsum adscendit & etiam digitorum phalanges connectit, quarum secundae antice disiunctae sunt, ita ut supra ligamentum vngularum fossula triquetra adsit. *Vngulae spuriae* in quolibet pede pariter duae, conico compressae, breues, retrorsum ad primam phalangium flexuram sitae.

De *velleris colore* sequentia valent. *Facies* lutescens, macula in dorso nasi fuscescente picta, & nigro alboque fasciata; litura scilicet vtrinque albida, digitum transversum lata, ex angulo narium externo seu postico ad cantum oculi internum excurrente; alteraque vtrinque fuscescente eiusdem latitudinis, ex angulo oris ad sinum lacrymale tendente. Sed hae fasciae, quae in adultis iunioribus, cornubus vix 8 poll. longis & annulis tantum 13 exasperatis, sat evidentes sunt, (ut ex capite magni-

Tab. XII. tudine naturali dimidio minori Tab. XII repraesentato cognoscere licet), in senioribus magis magisque evanescent, adeo ut in illo individuo, cornubus fere pedilibus, quale Tab. IX sistit, fere nullae sint; tandemque in grandaevis facies tota uniformiter albida, deletis non solum fasciis, sed etiam extincta omni lutei tinctura, ut in altero individuo observavi, cuius cornua nec longiora, nec pluribus annulis instructa fuerunt, illis Tab. IX exhibi-

tis,

ris, sed inter se, & ad anulum ultimum seu supremum, & ad apicem, quoad $1\frac{1}{4}$ poll. magis distabant. Caueant igitur systematici, ne ex faciei colore, pro aetate variabili, notas specificas Antilopum sumant. — *Auriculae* extus albedo-lutescentes, intus albae. — Lutescenti-alba sunt *collum* *subtus* totum a labio inferiori vsque ad pectus, nec non *pedes* *intus*; — *niuea* *pectus*, *hypochondria*, *abdomen* totum & *nates*, non ultra caudam; — cinerascenti-brunnea *collum* *supra* & ad latera, atque *dorsum* totum cum *hypochondriis*, quae fascia longitudinali, albedo-lutescenti, digitum transversum lata, ornata & versus abdominis albedinem umbra intensiori fuscescenti-brunnea terminata sunt; — *femora* & *crura* *extus* pariter ac *dorsum* cinerascenti-brunnea, area in femoribus dilutiori; — *scopae* ad gambas anteriores infra carpi flexuram lutescenti, albedo & nigro striatae; — *palmae* & *plantae* ab ungulis spuris ad ungularum verarum basin vsque, & corona tota ungularum nigrae; — *cauda* tota nigra, in grandaevis pilis albis variegata.

Pilorum longitudo varia; in dorso longissimi, bipollicares; in ventre breuiores; in pedibus, naso & auriculis breuissimi. Tactu pili mollissimi, praesertim in abdomine, totum corpus obuescentes, mammarum & sinuum inguinalium regione tantum nuda.

In *haedillo neonato* color vniformiter fusco-lutescens; pectore, abdomine, atque humeris femoribusque interne niueis; cauda *subtus* & ad apicem nigricante. Ad ungularum iuncturam anticam tantum aliqui pili nigri, ceterum nullibi. Fasciae nec in facie, nec ad hypochondria;

scopae ad carpum luteae, non nigro striatae. Atque in hoc cornuum tubercula vix protuberantia inter pilos. Guttur auellanae magnitudine prominens in hoc animalculo, ab apice rostri ad anum 1 ped. 8 poll. longo, & ad pedes anticos 1 ped. 5 poll. ad posticos autem 1 ped. & 6 poll. alto, longitudine caudae $4\frac{3}{4}$ poll. & auricularum $3\frac{1}{2}$ poll. mensurae semper parisinae.

Hisce subiungam *dimensiones partium externarum*
Antilopes subgutturosaе adultae senioris, quae sequuntur:

	poll.	lin.
Longitudo ab apice rostri ad anum in linea recta	40	—
Longitudo capitis a rostro ad occiput	9	—
Circumferentia rostri pone nares	6	9
Circumferentia oris	5	—
Distantia inter nares inferne	—	4
Distantia inter nares superne	1	4
Diameter inter canthos oculi	1	3
Diameter perpendicularis inter palpebras	1	—
Diameter inter rostrum & canthos anticos	4	10
Diameter inter canthos posticos & aurem	2	9
Diameter inter canthos anticos in linea recta.	3	—
Diameter eadem in linea curua	3	9
Diameter finuum lacrymalium	—	10
Profunditas eorum	—	10
Diameter inter angulum superiorem finuum lacrymalium & canthum anteriorem oculi	—	5

Diame-

	poll.	lin.
Diameter inter angulum inferiorem sinuum lacrymalium & canthum anteriorem oculi	—	10
Distantia inter bases cornuum interne	—	4
Distantia inter bases cornuum externe	2	8
Distantia inter cornua maxima	7	—
Distantia inter apices cornuum	6	6
Longitudo cornuum in linea recta	11	4
Longitudo cornuum in linea curua antica	13	6
Longitudo apicis laevis cornuum	2	4
Peripheria capitis ante cornua	15	—
Longitudo auricularum a vertice ad apicem	5	2
Distantia inter bases auricularum	3	—
Longitudo colli a gula inflexa ad sterni caput	10	—
Circumferentia colli ad gulam	15	—
Circumferentia colli ad sternum	17	—
Diameter perpendicularis colli in medio	5	6
Circumferentia corporis pone pedes anticos	27	6
Eadem ad processum xyphoideum	29	—
Eadem ante pedes posticos	25	6
Diameter perpendicularis corporis ad apicem sterni	11	—
Longitudo caudae ab ano ad apicem ossis coxigis	7	4
Longitudo eiusdem ad apicem pilorum extimorum	9	6
Longitudo a capite sterni ad apicem	11	—
Longitudo ab apice sterni ad praeputium	7	—
Longitudo a praeputio ad lineam transversalem mammalem	2	9

	poll.	lin.
Longitudo a linea transuersali mammali ad scrotum	1	2
Longitudo a scroto ad anum	5	3
Longitudo scroti	2	9
Latitudo scroti	2	6
Crassitudo scroti	1	5
Distantia inter mammarum papillas	1	3
Distantia inter sinus inguinales	2	—
Diameter sinuum inguinalium	—	10
Profunditas sinuum inguinalium	—	10
Altitudo perpendicularis ab interscapulio ad a- picem vngularum anticarum	26	6
Longitudo cubiti	7	2
Circumferentia cubiti	3	3
Longitudo gambae anterioris	6	—
Circumferentia gambae minima	2	2
Longitudo phalangum pedum anteriorum	2	6
Longitudo vngularum verarum ad marginem anticum	2	2
Longitudo ab vngulis spuris ad basin verarum	1	6
Latitudo vngularum verarum anteriorum	1	2
Altitudo a lumbis ad apicem vngularum poste- riorum	28	6
Longitudo cruris a patella ad calcaneum	10	—
Longitudo gambae posterioris a calcaneo ad vngulas spurias	9	—
Longitudo phalangum posteriorum	2	6
Longitudo vngularum verarum posteriorum ad marginem anticum	1	3

Longi-

Longitudo ab ungulis spuris posticis ad basin	poll.	lin.
verarum - - - - -	1	2
Latitudo ungularum verarum posteriorum -	-	1 1/2

ANATOMIA

Antilopes subgutturofae.

Buccae interne papillis conicis acuminatis oblitae, quarum anteriores liuidae, posteriores albae. Dimidia antica *palati* pars rugis transuersis duodecim exarata; quae aequales & planae, lineola intermedia disiunctae & situ ad hanc alternae; ante primam rugam tuberculum rhombeum; margo anterior palati rotundatus, obtusus, edentulus, niger; postica palati pars alba, laevis.

Dentes incisivi inferiores octo, intermediis duobus latissimis, cestriformibus, vtrinque subsequenter dimidio angustioribus, vtrinque duobus extremis linearibus angustissimis, longitudine omnes aequales & apice scindentes, (vid. Tab. XI fig. 3, quae crus maxillae inferioris finistrum repraesentat). *Dentes canini* nulli; *molares* remoti, supra infraque sex vtrinque, truncati, rugosi; inferiorum primus seu anterior acutus et simplex, secundus & tertius obsolete bilobi, quartus & quintus euidenter bilobi, sextus trilobus; superiorum tres primi simplices, tres ultimi seu posteriores bilobi, (vt ex fig. 1 & 3 Tab. XI patet).

Lingua oblonga, latitudinis pollicaris vbique aequalis, a ligamento sublinguali ad apicem sesquipollicem, a basi ad apicem quinque pollices longa; apice obtuso, nigro,

gro, tenui, laevi; medio papillis conicis, rigidis, magnis, in triangulum dispositis exasperata; ad bascos latera papillis nonnullis calyculatis obsita.

Epiglottis cordiformis, apice et marginibus antrorsum reflexis. *Offis hyoidei* corpus sphaerico-triangulum, cartilagineum, pollicem latum, horizontale, interstitio superiori alarum cartilaginis thyreoideae respondens et ad angulos eiusdem posteriores duobus cruribus auctum, quorum vnum inferius, alterum superius; crus inferius ossis hyoidei perpendiculariter ad margines laterales cartilaginis thyreoideae descendens, vix duos pollices longum, apice cartilagineum et acuminatum; crus superius horizontaliter ad vertebrae colli procedens, quatuor pollices longum, triarticulatum, articulo primo pollicari, secundo vix semipollicari, tertio fere tripollicari et apice bifido.

Cartilago thyreoidea integra, perfecte nasiformis, apice obtuso valde prominulo, diametro longitudinali trium pollicum, transversali ab apice ad partem posticam $2\frac{3}{4}$ poll. exinde guttur tuberosum, apice huius cartilaginis sesquipollicem ante arteriam asperam prominente. *Cartilaginee aritenoideae & cricoidea* nil singularis habent. Trachea diametro pollicari, ex annulis cartilagineis, tres lineas latis composita, quorum extremitates postice membrana duas lineas lata connectuntur. Haec omnia oculis lectoris exhibet figura 4 Tabulae XI, quae caput laryngis Antilopes subgutturifac adultae magnitudine naturali repraesentat: *A* margo posticus alae sinistrae cartilaginis thyreoideae, ab altero dextro intervallo duorum pollicum distans; *G* margo superior cartilaginis eiusdem, cui corpus ossis hyoidei
in

in situ naturali incumbit; *B* apex eiusdem cartilaginis sub gula prominens et collum subgutturatum reddens; *D* rima glottidis, musculis cricothyreoideis remotis conspicua; *C* pars antica cartilaginis cricoideae; *F* annuli tracheae.

Glandulae thyreoideae duae, vtrinque solitarie infra marginem cartilaginis cricoideae sitae, lateribus tracheae incumbentes, brunneae, tennes, oblongae, pollice breviores, semipollice angustiores, quarum sinistra sub littera *E* fig. cit. exhibita est. — Sub sinu lacrymali supra descripto, ante oculos in fovea anteorbitali, (quam sub litteris *r s* in Tab. X et in Tab. XI fig. 1 videre licet), sita est *glandula* ovata, iuglandis minoris magnitudine, tunica musculari externe vestita, substantia stipata, muco sebaceo-grumoso nigricante scatens, qui e foraminulis in fundo sinus obuiis digitis exprimi potest; hinc male *sinus*, lacrymalis dicitur, rectius *anteorbitalis* dicendus. *Lacrymarum glandulae* solito modo in orbita sitae sunt, earumque ductus in marginibus palpebrarum hiant. — Sub *sinibus inguinalibus*, (quorum situm *Tabula XXIV Tomi XII Hist. natur. Buff.* bene exprimit), *glandula* conglobata nulla, sed sub cute *glandulae solitariae*, seminis miliacei magnitudine, substantiam grumofam, luteam, hircine foetentem exsudantes.

Pulmo dexter quinquelobus; lobi quatuor longitudinaliter ad spinam siti, ultimo diaphragmati incumbente maximo, reliquis subaequalibus, quinto inter maximum hunc et cor collocato omnium minimo. *Pulmo sinister* bilobus, lobo superiore longissimo et sinuato. Hinc septem lobi pulmonales euentissimi et octauus obsoletus. *Cor* in *Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I.* L 1 me-

medio pectore situm sub offe sterni, apice vix sinistrorsum spectante, quatuor pollices longum, acuminatum. *Diaphragmatis* speculum ouatum, septem pollices latum.

Situs viscerum abdominalium remotis tunicis observatur ita: in regione iliaca et inguinali sinistra rumen, fundo in ipsa pubis regione, et sub hoc supra cristam ossium pubis fundus intestini caeci; in regione iliaca dextra sub costis curvaturae duae transversales coli; infra has ad regionem inguinalem dextram vsque, per omnem regionem epigastricam et umbilicalem gyri intestinorum tenuium, quorum extrema pars ipsam pelvim replet; cardiacam regionem occupant ventriculi secundarii; lien in imo hypochondrio sinistro rumini arcte adhaeret; hepar fundum hypochondrii dextri adimplet, vix in epigastrium pergens, diaphragmati et spinæ dorsali per ligamentum coronarium adnexum, deficiente ligamento lato suspensorio.

Hepar rotundatum, bilobum, lobo dextro maiore; accedente lobulo triquetro, tres pollices longo, ad lobum dextrum subtus obuius; latitudo hepatis a margine dextro ad sinistrum octo pollicum, a margine antico ad posticum quinque pollicum; crassitudo maxima decem lineas non exsuperat.

Vesicula fellea subtus in medio lobi dextri hepatis sita, sesquipollicem longa, angusta, collapsa, bile carens, mucosum tantum lutescente amaricante parietibus adhaerente, ut in tribus individuis adultis observaui. Hinc etiam ex hoc titulo, inter Ceruos & Capras haec Antilopum species medium tenet.

Lien

Lien patelliformis, fere sex pollices longus, quatuor pollices latus, semipollicem crassius, margine obtusiori vsque ad medium superficiei inferioris rumini adhaerens.

Ventriculorum Antilopes subgutturosaе figura & proportio omnino eadem, quae *Corinnae Buffonii* et *Daubentonii*, secundum *tab. 28* et *29 Tomi 12 Hist. natur.*, propria est. *Rumen* bituberculatum, incisura tres pollices profunda sinuatum, a cardia ad fundum inferiorem tredecim, et ad fundum superiorem decem pollices longum. *Tunica* interna ruminis facillime secedens papillosa; papillis ad incisuram minimis tuberculatis, in fundis $2\frac{1}{2}$ lineas longis et vnam lineam latis, reticulum versus longissimis, semipollicem adaequantibus, latitudine semper lineari, apice rotundo, substantia tenui compressa. *Reticulum* paruum, sphinctere a cardia ruminis vix sex pollicum intervallo distante, superficiei interna hexagonis, diametro semipollicari atque lateribus vnam lineam altis, papillulis breuissimis echinatis, cancellata. *Omasus* ouato-acuminatus, tres pollices longus, diametro vix bipollicari, lamellis latissimis vnum pollicem altis, papillulis iis reticuli analogis sed duplo longioribus muricatis. *Abomasus* sex pollicum longitudine, diametro ad omasum quatuor, ad pylorum vnus pollicis, rugis internis laeuib, raris, latissimis vnum pollicem altis. Nec aegagropilas, nec concreta bezoartica in indiuiduis tribus masculis dissectis vidi; nec ab incolis, quod alias inueniantur, comperi.

Intestinum tenue 571 pollices longum, diametro pollicari; *caecum* 11 pollices longum, diametro sesquipollicari; *colon cum recto* 207 pollices longum, diametro cum

coeco aequali; scybala in recto ouata, ouinis similia. *Pancreas* difforme, duodeno adnexum.

Renēs figurae humanae, dextro duobus pollicibus altiore in situ naturali; longitudo eorum $2\frac{1}{2}$ poll., latitudo $1\frac{1}{2}$ poll., crassitudo 1 poll.; substantia duplici et hilo renali fat eudentibus. *Renēs succenturiati* difformes, tenues, albidī, parui. *Vesica urinaria* ouata, tres pollices longa, in imo fundo peluis reposita.

Testiculi ouati duos pollices longi et fere sesquipollicem crassi. *Epididymis* cylindrica, diametro semipollicari, ad marginem internum testis decurrens et ad extremitatem inferiorem tuberculo semipollicari prominens. *Vesiculae spermaticae* oblongae, depressae, femiarcuratae, sesquipollicem longae, septem lineas latae, duas lineas crassae, ex intestinulo gyratim inflexo conflatae. *Vas deferens* duodecim pollices longum. *Bulbus urethrae* cylindricus, crassissimo musculo vestitus, tres pollices longus, diametro octo linearum. *Penis* cylindrico-compressus, quatuor linearum diametro, ab angulo conuergentiae radicum corporum cavernosorum ad apicem glandis duodecim pollices longus, in medio in figuram S romani retrorsum curuatus per musculum gracilem a perinaeo procedentem. *Glans* penis cylindrico-acuminata, vix trium linearum diametro, vnum pollicem et octo lineas longa, apice obtusiusculo, laeui, ex quo *urethra* tenuissima longitudine trium linearum libere propendet. *Præputium* margine extimo ad sex pollices retractile, et circa marginem eundem interne tuberculis callosis, albidis, semine miliaceo maioribus oblitum. *Prosta-*

tae vtrinq̃ue ad bulbi vrethrae extremitatem anteriorem fitae, compresso-ouatae, octo lineas longae.

Skeleton Antilopes subgutturofae simillimum sceletō Gazellae *Buffoniana*e, quod Tabula XXV Tomi XII *Hist. natur.* repraesentat. In ossibus trunci & extremitatum differentiae minimae, quas suo loco enumerabo. Nec puto, illa in congeneribus magis discrepare. Sed cranii ossa, quoad figuram & proportionem, imo numerum probabiliter in speciebus veris huius generis adeo differunt, vt pariter ac in adfini ouillo & caprino genere in determinandis differentiis specificis vtiliter adhiberi possint. Hinc curavi, vt conficiantur icones cranii, faciem anticam (Tab. X) et lateralem (Tab. XI fig. 1) oculis exhibentes magnitudine naturali dimidio tantum minores, quia dimensiones figurarum *Buffonianarum* nimis paruae sunt, adeo vt singula ossa eorumque suturas distinguere non liceat. In iconibus his nostris sequentia notatu digniora sunt: *b* ossa rostri; *c* ossa maxillae superioris dentes molares suscipientia, foramine infraorbitali *d* perforata; *e* conchae nasi, extremitatibus anterioribus in narium cavitatem prominentes, vomere separatae; *l* margo e iunctura ossium rostri ortus, pro adhaesione septi narium cartilaginei inseruiens; *f* ossa nasi, conchis ad margines externos conspicuis; *g* ossa frontis, cornuum radicibus aucta et foraminibus supraorbitalibus *i* pertusa; *h* os verticis vnicum; *m* os occipitis cum apophysibus candyloidea *n* et mastoidea *o*; *k* pars squamosa et *q* pars petrosa ossis temporum, cum apertura auris *p*; *r* ossa zygomatica; *s* ossa lacrymalia, quorum pars inferior cum parte superiori ossis zygomatici fossam pro glandula illa supra descripta anteorbitali consti-

tuit, quae fossae in craniis ouillis obseruabili perfecte analogae, sed aliquantum profundior est.

Vertebrae colli 7, processus spinosis breuioribus quam in Gazella, iisque Corinnae (vid. Tab. XXX Tomi XII *Hist. nat. Buff.*) similibus, processu epistrophaei non dentiformi, sed semiannulari; vertebrae dorsi 13, processus spinosis illis Gazellae (vid. Tab. XXV Tomi XII l. c.) aequalibus; vertebrae lumborum 6, processus spinosis non antrorsum inclinatis, ut in Gazella, sed perpendicularibus, ut in Corinna; vertebrae ossis sacri spuriae 4; vertebrae ossis coxygis 12, quarum Cel. *Daubenton* in Gazella tantum 10 numerauit, ultimis tenuissimis forte deperditis. Costae 13, quarum 8 verae, 5 spuriae. Ossis sterni articuli 6, ultimo latissimo quadrato in processum xyphoideum triquetrum truncatum abeunte, qui cartilagine rotundata, plana, tenuissima terminatur. Cubitus, in medio praesertim, tenuior adhuc quam in Gazella *Buffoniana* atque adeo arcte cum radio coalitus, ut nil nisi crista radii esse videatur, quae infra extremitatem superiorem radii ad pollicis longitudinem rima tenui separata est.

Addamus dimensiones cranii Tab. X & XI praesentati, nec non trunci & extremitatum, quo skeleton integrum animalis, cuius mensurae externarum partium illis, quas antea dedimus, perfecte aequales erant, secundum proportionem illi proprias innotescat, adhibito semper pede *parifino* in duodecim pollices diuiso, atque pollice 12 lineas continente.

	poll.	lin.
Longitudo in linea recta ab rostri extremitate ad superficiem anticam radice cornuum	5	10
Longitudo in linea recta a superficie antica radice cornuum ad foramen occipitis	3	10
Longitudo ab extremitate ossium rostri ad apicem processus mastoidei in eodem plano horizontali situm	7	3
Latitudo frontis maxima inter orbitarum margines superiores	3	—
Latitudo capitis maxima inter margines posticos orbitarum	3	10
Distantia inter apices processuum mastoideorum	2	1
Distantia inter zygomata	3	2
Distantia inter dentes molares superiores ultimos	2	1
Distantia inter dentes molares medios	2	2
Distantia inter dentes molares anteriores	1	4
Latitudo ad extremitatem ossium rostri	—	8
Diameter inter aperturas aurium	2	7
Diameter perpendicularis inter ossa palati & marginem anteriorem ossis frontis	2	3
Longitudo ab extremitate ossium rostri ad extremitatem anteriorem ossium nasi	2	4
Longitudo ossium nasi	2	1
Diameter foraminis atlantis perpendicularis	—	5
Diameter eiusdem transversalis	—	9
Longitudo corporis epistrophaei, qui vertebrae longissimus	2	1

Longi-

	poll.	lin.
Longitudo processus femi-annularis epistrophaei	—	4
Altitudo processus spinosi per totum epistrophaeum decurrentis	—	9]
Longitudo vertebrarum dorsi, subaequalium inter se	—	9
Longitudo spinosi vertebrae dorsalis tertiae processus, qui omnium longissimus	3	2
Longitudo vertebrae lumborum quintae	1	—
Longitudo transversae vertebrae lumborum quintae processus, qui omnium longissimus	1	8
Longitudo ossis sacri	2	9
Latitudo ossis sacri maxima ad extremitatem dorsalem	2	11
Latitudo ossis sacri minima ad extremitatem caudalem	—	11]
Longitudo vertebrarum ossis coxygis subaequalium	—	9
Diameter pelvis inter symphyfin pubis et angulum ossis sacri	2	10
Diameter pelvis transversalis superior	2	4
Longitudo ossium innominatorum maxima	7	4
Longitudo costae primae, quae brevissima	3	10
Longitudo costae nonae, quae longissima, in linea recta	7	7
Latitudo costae quintae, quae latissima	—	8
Latitudo costae decimae tertiae quae angustissima	—	3 $\frac{1}{2}$
Longitudo ossis sterni	8	8
Latitudo sterni maxima ad processum xyphoideum	1	7
		Longi-

	poll.	lin.
Longitudo scapulae ad marginem superiorem -	5	—
Longitudo eiusdem ad marginem inferiorem -	5	3
Longitudo baseos seu marginis posterioris -	3	—
Altitudo maxima spinae scapulae - - -	—	8
Longitudo ossis humeri - - - -	5	3
Diameter eius minima - - - -	—	7
Longitudo cubiti cum olecrano - -	7	5
Longitudo olecrani - - - -	1	10
Longitudo radii - - - - -	6	—
Longitudo carpi - - - - -	—	8
Diameter carpi - - - - -	—	11
Longitudo gambae anterioris - -	6	5
Diameter transversalis gambae anterioris in medio - - - - -	—	6
Longitudo phalangis primae anterioris - -	1	7
Longitudo phalangis secundae anterioris - -	—	10
Longitudo phalangis tertiae anterioris - -	—	10
Longitudo femoris - - - - -	6	8
Longitudo patellae - - - - -	1	—
Latitudo patellae - - - - -	—	9

	poll.	lin.
Longitudo cruris	8	—
Longitudo tarfi	—	9
Latitudo transuersalis tarfi	—	11
Longitudo calcanei	2	—
Longitudo gambae posterioris	7	4
Diameter transuersalis gambae posterioris in medio	—	6
Longitudo phalangis primae posterioris	1	3
Longitudo phalangis secundae posterioris	—	9
Longitudo phalangis tertiae posterioris	—	13

ASTRONOMICA.

1. *Chlorophyll a* (Chl *a*)

1. 23. 1944

© 2004 Blackwell Publishing Ltd, *Journal of Internal Medicine* 255: 101–108

1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 26

(continued)

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES

FAITES À GENEVE

par

J. A. MALLET.

Les observations que j'ai l'honneur de présenter à l'illustre Académie des Sciences, sont 11 occultations d'étoiles par la Lune faites à Genève dans mon observatoire dans les années 1775, 1776 & 1777. M. *Jean Trembley* & *Marc. Picter* mes compatriotes très versés dans l'astronomie, ont fait avec moi la plûpart de ces observations, & m'ont beaucoup aidé aussi dans les calculs dont je donne ici les principaux résultats. Les Elémens du calcul ont été pris dans les Tables de la Lune & du Soleil de *Mayer* imprimées à Londres en 1770; il n'y a que l'obliquité de l'écliptique qui pour les trois premières observations seulement, a été prise dans la Connoissance des Temps. La différence des méridiens de Genève & Greenwich a été supposée pour ces trois premières observations de 24'. 6" de temps, & pour les suivantes de 24'. 16".

Les parallaxes de longitude & de latitude de la Lune ont été calculées par la methode de Mr. *Lexell*, suivant les formules qu'il a données dans les Ephemerides de Berlin de 1777. La position des étoiles a été prise dans le Catalogue de *Bradley* imprimé dans le Nautical-Almanach de 1773, & dans celui de *la Caille* qui est dans *l'Astronomie Fundamenta*. Lorsque l'étoile s'est trouvée dans les deux catalogues, on a pris une moyenne entre les deux positions données par ces deux auteurs.

Cette position a été reduite au moment de l'observation, par les formules ordinaires de précession, d'aberration & de nutation, & en outre on a fait usage des dernieres formules données par Mr. *de la Grange* dans le Recueil des Tables astronomiques de Berlin, pour calculer la variation séculaire en longitude & latitude.

Le résultat de tous ces calculs est le tems vrai de la Conjonction, & l'erreur des Tables de la Lune. L'un & l'autre ont été calculés séparément pour l'Immersion & l'Emerfion suivant la methode de Mr. *Lexell*, en faisant usage de la latitude de la Lune prise dans les Tables, & on a ajouté à la suite du tems trouvé pour la Conjonction, la quantité dont il doit varier pour une petite correction faite au diametre de la Lune, à sa latitude, & à sa parallaxe horizontale, corrections que l'on pourra déterminer par la comparaison de la même occultation observée dans différens endroits, comme Mr. *Lexell* l'a fait avec beaucoup de sagacité dans plusieurs observations, & surtout pour celle de l'eclipse de Soleil de 1769. δ désigne le nombre de secondes, dont il faut augmenter le rayon de la Lune,

Lune, η l'augmentation de sa latitude, & π de sa parallaxe horizontale. Ces corrections produisent aussi un changement dans l'erreur de la longitude de la Lune donnée par les Tables : ce changement est le même que celui qu'on a trouvé pour le temps de la conjonction & qu'on réduit en secondes de degré, mais il peut avoir un signe différent. Ainsi par exemple dans la 3^e observation, on trouve pour l'Immersion le temps de la Conjonction de Regulus à $14^h 11' 0'', 6 + (2, 26 \delta + 0, 974 \eta - 0, 00 \pi)''$, & en appelant Φ'' la somme des trois derniers termes composés de δ , η , & π , on aura $52'', 4 + 0, 49 \Phi''$ pour le nombre de secondes dont la longitude de la Lune, calculée par les Tables, est trop grande.

Par l'Émerſion de la même occultation l'erreur des Tables en longitude est $54'', 6 - 0, 49 \Phi''$ (en désignant ici par Φ'' , la variation $- 2, 24 \delta - 0, 93 \eta + 0, 00 \pi$ trouvée pour le temps de la conjonction déterminée par cette Émerſion).

Lorsque l'Immersion & l'Émerſion ont pu être toutes les deux observées, nous avons encore calculé le temps de la conjonction & l'erreur des Tables en longitude & latitude, par une autre méthode qui n'emploie pas la latitude absolue de la Lune, mais seulement les mouvemens de la Lune en longitude & latitude pendant la durée de l'occultation; cette méthode est celle que Mr. de la Lande a donnée dans son Astronomie.

GI représente l'écliptique, S le lieu de l'étoile, Tab. XIII.
 L le centre apparent de la Lune affectée de la parallaxe, au Fig. 1.
mo-

moment de l'Immersion, F son centre au moment de l'Émerfion, F A & D E deux parallèles à l'écliptique, D G, S H & E I des perpendiculaires à l'écliptique; enforte que F L fera le mouvement de la Lune sur son orbite apparente pendant l'occultation, A F L l'angle d'inclinaison de l'orbite apparente. H I la différence des longitudes apparentes de la Lune au moment de l'Immersion & au moment de la Conjonction & E L la différence des latitudes apparentes de l'étoile & de la Lune au moment de l'Immersion. Après avoir donné la valeur de ces quatre quantités calculées, nous en avons tiré les trois resultats importants, le temps de la conjonction & l'erreur des Tables en longitude & latitude.

I. Observation.

Émerfion de Regulus, de la partie obscure de la Lune observée par Mrs. *Mallet & Trembley* le 12 Decembre 1775 à 10^b. 27^l. 57^{ll}. 8 temps vray.

Calcul.

Différence des méridiens fupposée entre

Genève & Paris 14^l. 50^{ll}. de temps.
- - - entre Genève & Greenwich 24^l. 6^{ll}.

Longitude du ☉ calculée par les Tables de *Mayer* - -

VIII^s. 20°. 48^l. 11^{ll}. 5.

Ascension droite du ☉ - -

VIII. 19. 59. 25. 2.

Obliquité de l'écliptique prise dans la Connoissance des temps - -

23. 27. 49.

Longitude vraye de la ☾ calculée par les Tables de *Mayer* - -

IV. 26. 9. 58. 6.

Lati-

Latitude vraie boréale de la ☾	-	-	0°. 48'. 56". 9.
Mouvement horaire de la ☾ en longitude	-	-	29. 28, 9.
Mouvement horaire de la ☾ en latitude	-	-	2. 37, 0.
Parallaxe horizontale aequatorienne de la ☾	-	-	54. 20, 1.
Diamètre horizontal de la ☾	-	-	29. 36, 7.
Diamètre de la ☾ augmenté à cause de son élévation	-	-	29. 40, 4.
Parallaxe dont la longitude vraie de la ☾ est augmentée	-	-	48. 30, 7.
Parallaxe dont la latitude vraie de la ☾ est diminuée	-	-	23. 6, 0.
Longitude apparente de Regulus tirée des Catalogues de <i>la Caille</i> & de <i>Bradley</i>	-	IV ^{es} .	26. 42. 52, 8.
Latitude apparente boréale de Regulus	-	-	0. 27. 34, 7.

Resultat.

Temps vrai de la Conjonction le 12 Decembre 1775 à
 $11^h. 36^l. 42''.$ $3 - 2, 05 \delta - 0, 24 \eta + 1, 92 \pi.$

Erreur dont la longitude de la ☾ calculée par les Tables de *Meyen* est trop grande $= 52''.$ $4 + 0^l, 49 \Phi''.$

2. Observation.

Immerfion de Regulus, dans la partie obscure de la Lune,
 obfervée par Mrs. *Mallet & Trembley* le 3. Mars 1776 à
 $5^h.42'.17''.5$ Temps vray.

Calcul.

Différence des méridiens fupposée		
entre Genève & Paris de $14'.50''$ de temps.		
entre Genève & Greenwich de $24'.6''$ de temps.		
Obliquité de l'ecliptique prife dans la		
connoiffance de temps - - -		$23^{\circ}.27'.49''$.
Longitude du ☉ - - -	} Par les Tabl. de Mayer.	XI ^e . $13.46.22,6$.
Afcenf. droite du ☉ - - -		XI. $15.3.7,7$.
Longit. vraye de la ☾ - - -		IV. $25.44.26,2$.
Latit. vraye boréale de la ☾ - - -		- $0.56.15,0$.
Mouv. horiz. de la ☾ en longit. - - -		- $29.30,3$.
Parallaxe horiz. aequator. de la ☾ - - -		- $54.7,3$.
Diamètre horiz. de la ☾ - - -		- $29.29,7$.
Diamètre de la ☾ augmenté - - -		- $29.37,8$.
Parallaxe dont la longit. vraye de la ☾		
est augmentée - - -		- $46.51,9$.
Parallaxe dont la latit. vraye de la ☾		
est diminuée - - -		- $21.19,8$.
Longit. appar. de Regulus tirée de		
<i>Bradley & de la Caille</i> - - -	IV.	$26.43.15,2$.
Latit. appar. - id. - - -		- $0.27.35,1$.

Refultat.

Temps vray de la Conjonction le 3 Mars 1776 à $7^h.43'.46''.2 + 2.34\delta - 1.16\eta + 2.22\pi$.

Erreur dont la longit. de la ☾ par les Tables de *Mayer*
 est trop grande = $55''.2 + 0,49\Phi'$.

3. Ob-

3. Observation.

Occultation de Regulus par la Lune, observée par Mrs. *Mallet*
& *Trembley* le 30 Mars 1776.

Immersion dans la partie obscure à 14^h. 29^m. 9^s. 42^{''}
Emerfion de la partie éclairée à 15. 23. 47. 85 } Temps vray.

Calcul.

Différence des méridiens

de Genève & Paris fupposée de 14^l. 50^{''} de temps.

de Genève & Greenwich fupposée de 24^l. 6^{''} de temps.

	Pour l'Immerf.	Pour l'Emerf.
Obliquité de l'eclipt. prise dans la con noiffance des temps - - -	- 23°. 27 ^l . 49 ^{''} .	- - -
Longitude du ☉ - - -	0°. 10. 56. 9. 0.	0°. 10°. 58 ^l . 23 ^{''} . 6.
Ascenf. droite du ☉ - - -	0. 10. 3. 2. 9.	0. 10. 5. 7. 1.
Longitude vraye de la ☾ - - -	IV. 26. 53. 0. 0.	IV. 27. 19. 49. 9.
Latitude vraye de la ☾ boréale	- 1. 7. 45. 9.	- 1. 10. 6. 5.
Mouvement hor. de la ☾ en longit.	- - 29. 27. 0.	- - 29. 26. 9.
Mouvement hor. de la ☾ en latit.	- - 2. 34. 4.	- - 2. 34. 1.
Parallaxe horiz. aequator. de la ☾	- - 54. 11. 7.	- - 54. 11. 6.
Diamètre horiz. de la ☾ - - -	- - 29. 32. 1.	- - 29. 32. 1.
Diamètre de la ☾ augmenté - - -	- - 29. 40. 3.	- - 29. 35. 9.
Parallaxe dont la longit. de la ☾ est diminuée - - -	- - 22. 18. 3.	- - 22. 15. 1.
Parallaxe dont la latitude de la ☾ est diminuée - - -	- - 46. 33. 4.	- - 48. 41. 9.
Longitude appar. de Regulus tirée de <i>Bradley</i> & <i>de la Caille</i> . - - -	IV. 26. 43. 13. 2	- - -
Latitude appar. de Regulus id. - - -	- 0. 27. 35. 1.	- - -

Resultat.

Par l'Immerfion: Temps vray de la Conjonction

le 30 Mars à $14^h. 11'. 0''. 6 + 2, 26 \delta + 0, 97 \eta - 0, 005 \pi$.

Par l'Emerfion: Temps vray de la Conjonction

le 30 Mars à $14^h. 11'. 3''. 3 - 2, 24 \delta - 0, 93 \eta + 0, 004 \pi$.

Par un milieu entre l'Immerfion & l'Emerfion

le 30 Mars à $14^h. 11'. 2''. 0 + 0, 01 \delta + 0, 02 \eta + 0, 00 \pi$.

Erreur dont la longitude de la ☾ par les Tables

de *Mayer* est trop grande $\begin{cases} 52''. 4 + 0, 49 \Phi'' \text{ par l'Imm.} \\ 54''. 6 - 0, 49 \Phi'' \text{ par l'Emerf.} \end{cases}$

Par la methode qui est dans l'Astronomie de *Mr. de la Lande*
on trouve:

Mouvement de la ☾ sur l'orbite appar. pendant l'occul-
tation $FL = 0^\circ. 26'. 53''. 1$.

Inclinaifon de l'orbite appar. $AF L = 0^\circ. 25'. 47''. 3$.

Distance de l'Immerf. à la Conjonct. appar. $HI = 13'. 24''. 9$.

Différence des latitudes apparentes de la ☾ & de l'étoile,
pour l'Immerfion $EL = 6'. 20''. 1$.

D'où refulte le Temps de la Conjonct. vraye à $14^h. 11'. 2''. 6$.

L'Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la longitude
de la ☾ trop grande $= 53''. 5$.

Et l'erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent la latitude
de la ☾ trop petite $= 2''. 5$.

4. Observation.

Immersion de γ de la Balance, dans la partie éclairée de la Lune, observée par Mr. *Mallet* le 6 Avril 1776.

à 14^h. 55^l. 50^l. - Temps vrai.

Calcul.

Différence des méridiens supposée

entre Genève & Paris de 15^l. 00^l. de temps.

entre Genève & Greenwich de 24^l. 16^l. de temps.

Longitude du ☉	- - -	} Par les Tabl. de Mayer.	0 ^l . 17 ^l . 49 ^l . 2 ^l , 2.
Ascens. droite du ☉	- - -		0. 16. 25. 35,
Obliquité de l'ecliptique	- - -		- 23. 28. 00,
Longit. vraie de la ☾	- - -		VII. 21. 42. 29, 4.
Latit. vraie boréale de la ☾	- - -	} Par les Tabl. de Mayer.	- 4. 59. 4, 4.
Mouvement hor. de la ☾ en longit.	- - -		- - 31. 38, 5.
Parallaxe horiz. aequator. de la ☾	- - -		- - 55. 53. 8.
Diamètre horiz. de la ☾	- - -		- - 30. 27, 8.
Diamètre de la ☾ augmenté	- - -	} Par les Tabl. de Mayer.	- - 30. 42, 8.
Parallaxe dont la long. vr. de la ☾	- - -		- - 9. 6, 9.
est augmentée	- - -		- - 9. 6, 9.
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾	- - -		- - 47. 35, 2.
est diminuée	- - -		- - 47. 35, 2.
Longit. appar. de γ de la Balance tirée de la <i>Caille</i> & <i>Bradley</i>	- - -	VII.	22. 00. 38, 2.
Latitude appar. boreale - id.	- - -	-	4. 24. 32, 4.

Resultat.

Temps vrai de la Conjonction le 6 Avril 1776

à 15^h. 10^l. 54^l. 7 + 3, 13 δ + 2, 49 η - 1, 81 π .

Erreur dont la Longit. de la ☾ par les Tabl. de *Mayer*

est trop grande = 17^l. 8 + 0, 53 Φ ^l.

5. Observation.

Immersion d'une étoile qui est entre la Balance & le Scorpion, dans la partie obscure de la Lune, observée par

Mrs. Trembley & Pictet le 25 Juillet 1776 à 10^b 29' 58" 7

Temps vray.

Calcul.

Différence des méridiens

de Genève & Paris supposée de 15'. 00". de temps.

de Genève & Greenwich supposée de 24'. 16". de temps.

Longitude du ☉	-	-	-	IV ^s .	3°. 23'. 26". 9.
Ascens. droite du ☉	-	-	-	IV.	5. 42. 0, 2.
Obliquité de l'ecliptique	-	-	-	-	23. 28. 1, 0.
Longitude vraye de la ☾	-	-	-	VII.	28. 22. 11, 9.
Latitude vraye boréale de la ☾	-	-	-	-	4. 54. 42, 3.
Mouvement hor. de la ☾ en longit.	-	-	-	-	32. 1, 9.
Parallaxe horiz. aequator. de la ☾	-	-	-	-	56. 27, 7.
Diamètre horiz. de la ☾	-	-	-	-	30. 46, 4.
Diamètre de la ☾ augmenté	-	-	-	-	30. 52, 7.
Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾	-	-	-	-	-
est diminuée	-	-	-	-	20. 58, 1.
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾	-	-	-	-	-
est diminuée	-	-	-	-	51. 4, 9.
Longitude appar. de l'étoile tirée du	-	-	-	-	-
Catalogue de Flamsteed	-	-	-	VII.	28. 17. 24, 0.
Latitude appar. boréale de l'étoile id.	-	-	-	-	4. 4. 21, 5.

Resultat.

Temps vrai de la Conjonction le 25 Juillet 1776

à 10^b. 29'. 58". 7 + 1, 87 δ + 0, 09 η - 0, 78 π.

Erreur dont la Longit. de la ☾ par les Tables de Mayer

est trop petite = 42". 5 - 0, 53 φ".

6. Ob

6. Observation.

Immersion de la précédente des deux australes du quarré
des Poissons, dans la partie éclairée de la Lune, observée
par Mrs. Mallet & Trembley le 20 Aoust 1777
à 10^b. 59^l. 3^{''}, 7 Temps vrai.

Calcul.

Différence des méridiens

de Genève & Paris supposée de 15^l. 00^{''}. de temps.
de Genève & Greenwich supposée de 24^l. 16^{''}. de temps.

Longitude vraie du ☉	-	-	IV ^s . 28°. 6'. 29 ^{''} , 0.
Ascens. droite du ☉	-	-	V. 0. 16. 59,
Obliquité de l'ecliptique	-	-	- 23. 28. 3,
Longit. vraie de la ☾	-	-	XI. 24. 33. 22, 2.
Latit. vraie australe de la ☾	-	-	- 4. 45. 16, 2.
Mouvement hor. de la ☾ en longit.	-	-	- - 36. 19, 6.
Parallaxe horiz. aequator. de la ☾	-	-	- - 59. 55, 6.
Diamètre horiz. de la ☾	-	-	- - 32. 39, 8.
Diamètre de la ☾ augmenté	-	-	- - 32. 54, 3.
Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ est augmentée	-	-	- - 7. 4, 7.
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ est augmentée	-	-	- - 53. 50, 6.
Longit. appar. de l'étoile tirée de Bradley	-	-	XI. 24. 56. 30, 0.
Latit. appar. australe de l'étoile id.	-	-	- 5. 42. 33, 5.

Resultat.

Temps vrai de la Conjonction le 20 Aout 1777

à 11^b. 37^l. 27^{''}. 3 + 1, 69 δ + 0, 36 η + 0, 51 π.

Erreur dont les Tables de Mayer donnent la longitude
de la Lune trop grande = 7^{''}. 1 + 0, 61 φ^{''}.

7. Ob-

7. Observation.

Immersion de la suivante des deux australes du quarré
des Poissons, dans la partie éclairée de la Lune, observée
par Mrs. *Mallet & Trembley* le 20 Aoust 1777
à 13^b. 6^l. 13,^u 5 Temps vrai.

Calcul.

Différence des méridiens

de Genève & Paris supposée de 15^l. 00^u de temps.

de Genève & Greenwich supposée de 24. 16

Longitude vraie du ☉	- - -	} par les Tables de <i>Mayer</i>	IV ^s . 28°. 11 ^l . 35 ^u , 6
Ascens. droite du ☉	- - -		V. 0. 21. 52, 0
Obliquité de l'ecliptique	- - -		- 23. 28. 3, 0
Longitude vraie de la ☾	- - -		XI. 25. 50. 22, 1
Latitude vraie australe de la ☾	- - -		- 4. 47. 52, 6
Mouvem. hor. de la ☾ en longit.	- - -		- - 36. 20, 9
Parallaxe horiz. aequator. de la ☾	- - -		- - 59. 56, 9
Diamètre horizont. de la ☾	- - -		- - 32. 40, 4
Diamètre de la ☾ augmenté	- - -		- - 33. 0, 8
Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾	- - -		- - 11. 34, 6
est diminuée	- - -		
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾	- - -		- - 46. 50, 4
est augmentée	- - -		
Longitude appar. de l'étoile tirée de <i>Bradley</i>	- - -		XI. 25. 50. 18, 0
Latitude appar. australe, <i>id.</i>	- - -		- 5. 46. 23, 3

Resultat.

Temps vrai de la Conjonction le 20 Aoust 1777

à 13^b. 6^l. 28^u, 8 + 2, 33 δ + 1, 65 η + 0, 97 π.

Erreur des Tables de *Mayer* qui donnent la Longitude de
la ☾ trop grande de 13^u, 4 + 0, 61 φ^u.

8. Ob-

8. Observation.

Occultation de μ de la Baleine par la Lune, observée par
Mrs. Mallet & Trembley le 23 Aoust 1777.

Immersion dans la partie éclairée à $10^h.55'.41'',5$ } Temps vr.
Emerfion de la partie obscure 11. 51. 36,0 }

Calcul.

Différence des méridiens

de Genève & Paris fupposée de $15'.00''$. de temps
de Genève & Greenwich de 24. 16

		Pour l'Immerf.	Pour l'Emerf.
Longitude vraie du \odot - - - ?	V ^s .	$0^{\circ}.59'.59'',2$	V ^s . $1^{\circ}.2'.14'',1$
Ascenf. droite du \odot - - -	V.	3. 2. 53, 7	V. 3. 5. 2, 9
Obliquité de l'ecliptique - - -	-	23. 28. 3, 0	- - -
Longitude vraie de la \odot - - -	I.	8. 7. 22, 7	I. 8. 40 55, 1
Latitude vraie australe de la \odot - - -	-	4. 48. 36, 0	- 4. 47. 31, 0
Mouvem. hor. de la \odot en longit.	-	36. 1, 2	- 36. 0, 3
Mouvem. hor. de la \odot en latit.	-	1. 9, 3	- 1. 11, 0
Parallaxe horiz. aequat. de la \odot - - -	-	59. 48, 3	- 59. 47, 6
Diamètre horiz. de la \odot - - -	-	32. 35, 6	- 32. 35, 2
Diamètre de la \odot augmenté - - -	-	32. 43, 3	- 32. 48, 3
Parallaxe dont la longit. vr. de la \odot est augmentée - - -	-	25. 56, 6	- 24. 1, 4
Parallaxe dont la latit. vr. de la \odot est augmentée - - -	-	52. 10, 3	- 49. 47, 6
Longitude appar. de l'étoile tirée de Bradley - - -	I.	8. 49. 2, 8	- - - -
Latitude appar. australe id. - - -	-	5. 34. 44, 8	- - - -

Resultat.

Par l'Immersf. Temps vrai de la Conjonct. le 23 Aoust 1777

à $12^b. 4^l. 22''$, $0 + 1, 79 \delta - 0, 66 \eta + 0, 157 \pi$.

Par l'Emerf. à $12. 4. 30, 5 - 1, 69 \delta + 0, 26 \eta + 0, 897 \pi$.

Par une moyenne entre l'Immerfion & l'Emerfion

à $12^b. 4^l. 26''$, $2 + 0, 05 \delta - 0, 20 \eta + 0, 527 \pi$.

Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la longit. de

la \odot trop petite de $\left\{ \begin{array}{l} 26'', 3 - 0, 60 \Phi^H \text{ par l'Immersf.} \\ 23, 0 - 0, 60 \Phi \text{ par l'Emerf.} \end{array} \right.$

Par la methode qui est dans l'Astronomie de Mr. de la Lande on trouve:

Mouvement sur l'orbite apparente pendant l'occultation, $FL = 0^\circ. 31^l. 39''$, 6

Inclinaison de l'orbite apparente, $AF L = 6. 16. 37, 8$

Distance sur l'eclipt. de l'Immersf.

à la conjonct. appar. $HI = 15. 19, 7$

Différ. des latit. appar. de l'étoile

& de la \odot à l'Immersf. $EL = 5. 56, 1$

D'où resulte le temps vrai de la Conjonction à $12^b. 4. 29''$, 1

l'erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la

longit. de la \odot trop petite de $23''$, 8

& l'erreur dont elles donnent la latit. de la \odot

trop grande $5''$, 4

9. Observation.

Occultation de δ précédente du Taureau par la Lune, observée par Mrs. *Mallet & Piéler* le 21 Septembre 1777.

Immerfion dans la partie éclairée à $11^b. 11^l. 42''$, 3 } temps vr.
Emerfion de la partie obscure - $12. 8. 32, 0$ }

Calcul.

Calcul.

Différence des méridiens

de Genève & Paris supposée - de 15'. 00'' } de temps
 de Genève & Greenwich - de 24. 16 }

		Pour l'Immerf.	Pour l'Emerf.
Longitude vraie du ☉ - - -	} Tables de Mayer par les	V ^s . 29°. 12'. 54'', 4	V ^s . 29°. 15'. 13'', 6
Ascens. droite du ☉ - - -		V. 29. 16. 48, 0	V. 29. 18. 56, 0
Obliquité de l'ecliptique - - -		- 23. 28. 4	- - - - -
Longitude vraie de la ☾ - - -		II. 2. 58. 13, 8	II. 3. 32. 15, 1
Latitude vraie australe de la ☾		- 3. 22. 9, 6	- 3. 19. 54, 7
Mouvem. hor. de la ☾ en longitude		- - 35. 58, 5	- - 35. 56, 6
Mouvem. hor. de la ☾ en latitude		- - 2. 21, 7	- - 2. 22, 7
Parallaxe horiz. aequat. de la ☾		- - 59. 53, 3	- - 59. 51, 9
Diamètre horiz. de la ☾ - - -		- - 32. 38, 3	- - 32. 37, 6
Diamètre de la ☾ augmenté - -		- - 32. 51, 5	- - 32. 55, 9
Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ est augmentée - - -		- - 32. 27, 0	- - 29. 27, 8
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ est augmentée - - -		- - 44. 48, 5	- - 41. 17, 0
Longitude appar. de l'étoile tirée de <i>la Caille & Bradley</i> - - -	II.	3. 45. 28, 8	- - - - -
Latitude appar. australe <i>id.</i> - - -	-	3. 59. 31, 3	- - - - -

Resultat.

Par l'Immerf. Temps vrai de la Conjonct. le 21 Septem-
bre 1777 à 12^b. 30'. 19'', 2 + 1, 87 δ - 0, 85 η + 0, 27 π.

Par l'Emerf. à 12. 30. 18, 2 - 1, 68 δ + 0, 17 η + 0, 94 π.

Par une moyenne entre l'Immersion & l'Emerfion

à 12^b. 30'. 18'', 7 + 0, 09 δ - 0, 34 η + 0, 60 π.

Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la Longitude
de la ☾ trop petite de $6''$, $7 - 0$, $60 \phi''$ par l'Imm.

& de 11 , $2 - 0$, $60 \phi''$ par l'Emerf.

Par la methode qui est dans l'Astronomie de Mr. de la
Lande on trouve :

Mouvem. sur l'orbite appar. pendant

l'occultation - - - - - $FL = 0^{\circ}. 31'. 29''. 6$

Inclinaison de l'orbite apparente $AFL = 10. 33. 47, 2$

Distance sur l'eclipt. de l'Immerf.

à la Conjonct. appar. - - - $HI = 14. 37, 0$

Différ. des latit. appar. de l'étoile

& de la ☾ à l'Immerfion - $EL = 7. 34, 0$

D'où resulte le temps vrai de la Conjonction à $12^h. 30'. 12'', 2$

l'erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent

la longit. de la ☾ trop petite - de $11'' 0$

& l'erreur dont elles donnent la latit.

de la ☾ trop petite de - - - de $7'', 2$

10. Observation.

Occultation de δ suivante du Taureau par la Lune, obser-
vée par Mrs. *Mallet* & *Pictet* le 21 Septembre 1777.

Immerfion dans la partie éclairée à $11^h. 36'. 55'', 2$ } Temps vr.
Emerfion dans la partie obscure à $12. 32. 46, 4$ }

Calcul.

Différence des méridiens

supposée de Genève & Paris de $15'. 00''$ } de temps.
de Genève & Greenwich de $24. 16$ }

Lon-

		Pour l'Immerf.	Pour l'Emerf.
Longitude vraie du ☉	- - - } <i>de Mayer.</i>	V ^s . 29°. 13'. 58'',8	V ^s . 29°. 16'. 14'',8
Ascens. droite du ☉	- - - }	V. 29. 17. 45,0	V. 29. 19. 51,0
Obliquité de l'ecliptique	- - - }	- 23. 28. 4,0	- - - -
Longitude vraie de la ☾	- - - }	II. 3. 13. 20,6	II. 3. 46. 46,2
Latitude vraie australe de la ☾	- - - }	- 3. 21. 10,1	- 3. 18. 57,1
Mouv. horiz. de la ☾ en longit.	- - - }	- - 35. 58,5	- - 35. 56,6
Mouvement. hor. de la ☾ en latit.	- - - }	- - 2. 21,7	- - 2. 22,7
Parallaxe horiz. aequat. de la ☾	- - - }	- - 59. 52,7	- - 59. 51,3
Diamètre horiz. de la ☾	- - - }	- - 32. 38,0	- - 32. 37,3
Diamètre de la ☾ augmenté	- - - }	- - 32. 54,4	
Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾	- - - }		- - 32. 58,4
est augmentée	- - - }	- - 31. 24,2	
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾	- - - }		- - 27. 31,3
est augmentée	- - - }	- - 43. 16,1	- - 39. 44,5
Longitude appar. de l'étoile tirée de la Caille & Bradley	- - - }	II. 4. 0. 56,7	- - - -
Latitude appar. australe <i>id.</i>	- - - }	- 4. 8. 0,8	- - - -

Resultat.

Par l'Immerf. Temps vrai de la Conjonct. le 21 Septem-
bre 1777 à 12^b. 56'. 9'',0 + 1,71 δ + 0,37 η + 1,14 π.

Par l'Emerf. à 12. 55. 57,3 - 2,02 δ - 1,14 η + 0,01 π.

Par une moyenne entre l'Immerfion & l'Emerfion

à 12^b. 56'. 3'',1 - 0,15 δ - 0,38 η + 0,57 π.

Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la longit. de
la ☾ trop petite - de 5'',9 - 0,60 Φ'' par l'Immerf.
& de 17,2 - 0,60 Φ'' par l'Emerf.

Par la methode qui est dans l'Astronomie de Mr. de la Lande
on trouve:

Mouvement sur l'orbite appar. pendant l'occultation

$$FL = 0^{\circ}. 30'. 1'', 4$$

Inclinaison de l'orbite apparente $AFL = 11. 1. 43, 2$

Distance sur l'ecliptique de l'Immerf.

$$\text{à la Conjonct. app.} - HI = 16. 3, 3$$

Différence des latit. appar. de l'étoile

$$\& \text{ de la } \odot \text{ par l'Immerf.} - LE = 3. 46, 9$$

D'où resulte le temps vrai de la Conjonct. à $12^b. 56'. 4'', 3$

l'erreur dont les Tabl. de Mayer donnent la

$$\text{longit. de la } \odot \text{ trop petite} - \text{ de } 8'', 6$$

& l'erreur dont elles donnent la Latit. de la \odot

$$\text{trop grande de} - - - 11, 9$$

11. Observation.

Occultation de δ précédente du Taureau par la Lune, observée par Mr. Trembley le 15 Novembre 1777.

Immersion dans la partie éclairée à $6^b. 50'. 53'', 6$ } Temps vr.
Emerfion dans la partie obscure à $7. 36. 40, 7$

NB. Le bord de la \odot étoit très tremblant à l'Immersion.

Calcul.

Différence des méridiens

$$\begin{array}{l} \text{de Genève \& Paris supposée de } 15'. 00'' \\ \text{de Genève \& Greenwich} - \text{ de } 24. 16 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 15'. 00'' \\ 24. 16 \end{array}} \right\} \text{ de temps}$$

Longi-

		Pour l'Immerf.	Pour l'Emerf.
Longitude vraie du ☉	- - 7	VII ^s . 23°. 47'. 14 ^h , 2	VII ^s . 23°. 49'. 9 ^h , 7
Ascens. droite du ☉	- - -	VII. 21. 24. 4, 0	VII. 21. 26. 2, 0
Obliquité de l'ecliptique	- - -	- 23. 28. 4, 0	- - - -
Longitude vraie de la ☾	- - -	II. 2. 55. 57, 1	II. 3. 25. 00, 0
Latitude vraie australe de la ☾	- - -	- 3. 4. 24, 5	- 3. 2. 18, 9
Mouvem. hor. de la ☾ en longit.	- - -	- - 38. 2, 1	- - 38. 1, 1
Mouvem. hor. de la ☾ en latit.	- - -	- - 2. 44, 1	- - 2. 45, 1
Parallaxe horiz. aequat. de la ☾	- - -	- - 61. 27, 8	- - 61. 27, 1
Diamètre horiz. de la ☾	- - -	- - 33. 29, 8	- - 33. 29, 4
Diamètre de la ☾ augmenté	- - -	- - 33. 39, 7	- - 33. 43, 7
Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ est augmentée	- - -	- - 34. 9, 9	- - 33. 43, 0
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ est augmentée	- - -	- - 48. 55, 3	- - 46. 13, 4
Longitude appar. de l'étoile tirée de la Caille & Bradley	- - -	II. 3. 45. 46, 1	- - - -
Latitude appar. australe <i>id.</i>	- - -	- 3. 59. 32, 4	- - - -

Resultat.

Par l'Immerf. Temps vrai de la Conjonct. le 15 Nov. 1777

à 8^h. 9'. 31^h, 4 + 1, 70 δ + 0, 63 η + 1, 38 π.

Par l'Emerf. à 8. 9. 41, 7 - 2, 08 δ - 1, 36 η - 0, 16 π.

Par une moyenne entre l'Immerfion & l'Emerfion

à 8^h. 9'. 36^h, 5 - 0, 19 δ - 0, 36 η + 0, 61 π.

Erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent la longit. de la

☾ trop grande de $\left\{ \begin{array}{l} 1'', 7 + 0, 63 \Phi^h \text{ par l'Immerf.} \\ 9, 2 + 0, 63 \Phi \text{ par l'Emerf.} \end{array} \right.$

Par

Par la methode qui est dans l'Astronomie de Mr. *de la Lande*
on trouve:

Mouvement sur l'orbite appar. pendant l'oc-
cultation - - - FL = $0^{\circ}. 28'. 55'', 8$

Inclinaison de l'orbite appar. - AFL = $9. 32. 1, 5$

Distance sur l'eclipt. de l'Immers.
à la Conjonct. apparente - HI = $15. 42, 8$

Différence des latitudes appar. de l'é-
toile & de la ☾ pour l'Immers. LE = $6. 7, 5$

D'où resulte le temps vrai de la Conjonct. à $8^h. 9^l. 34'', 6$

l'erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent
la longit. de la ☾ trop grande - de $3'', 7$

& l'erreur dont elles donnent la latit. de
la ☾ trop petite de - - - de $5'', 1$

RÉFLEXIONS SUR LES INÉGALITÉS DANS LE MOUVEMENT DE LA TERRE, CAUSÉES PAR L'ACTION DE VENUS

par
Mr. L. EULER.

Pour déterminer les dérangemens dans le mouvement des Planètes, qui sont causés par leur action mutuelle, on se sert ordinairement de la méthode, que j'ai employé le premier, si je ne me trompe, dans mes recherches sur les irrégularités, qu'on observe dans le mouvement de Saturne. Or cette méthode ne sçauroit réussir, à moins qu'on ne trouve moyen de transformer une telle formule irrationnelle: $(1 \pm n \cos. \Phi)^{-\frac{1}{2}}$ dans une série convergente, dont les trois premiers termes expriment déjà assez exactement la juste valeur; ce qui n'a aucune difficulté dans tous les cas, où la lettre n marque une fraction très petite, puisque alors les trois premiers termes de cette série: $1 \pm \frac{1}{2} n \cos. \Phi + \frac{15}{8} n^2 \cos^2. \Phi$ ne sçauroient s'écarter sensiblement de la vérité. Mais quand la valeur

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I. P p de

de n devient plus considérable & qu'elle approche même de l'unité: alors il est clair, que ces mêmes trois termes pourront bien énormément s'écarter de la valeur de la formule, & que les termes suivans, qu'on néglige, pourront causer une erreur très considérable.

Or cette formule entre très essentiellement dans le calcul; vu qu'elle renferme l'effet de l'action, que les deux Planètes exercent l'une sur l'autre. Pour montrer cela plus clairement, soient P & Q les deux Planètes, le Soleil étant supposé en repos en S , & nommant les distances $SP = p$ & $SQ = q$ & l'angle au Soleil $PSQ = \Phi$, la distance entre les Planètes sera $\sqrt{pp + qq - 2pq \cos. \Phi}$, au quarré de la quelle l'action des Planètes est réciproquement proportionnelle, qui sera donc comme

$\frac{A}{pp + qq - 2pq \cos. \Phi}$; mais la décomposition de cette force, que l'application aux principes du mouvement exige, conduit à des formules, divisées par le cube de cette distance PQ , dont la forme sera par conséquent

$$\frac{S}{(pp + qq - 2pq \cos. \Phi)^{\frac{3}{2}}}$$

ou bien $S (pp + qq - 2pq \cos. \Phi)^{-\frac{3}{2}}$, qui se réduit à la forme mentionnée, en supposant

$$pp + qq = SS \text{ \& } \frac{2pq}{pp + qq} = n.$$

De là on voit, que la valeur de la lettre n dépend du rapport des distances p & q , dont les deux Planètes sont éloignées du Soleil, & qu'elle ne sçauroit être une petite fraction, à moins que l'une de ces deux distances ne soit plu-

plusieurs fois plus grande que l'autre. Ainsi dans le cas ou Jupiter est supposé en P & Saturne en Q on a

$$p = 52029 \text{ \& } q = 95418$$

ou bien à peu près $p : q = 5 : 9$, d'où résulte la valeur de $n = \frac{45}{53}$, dont la proximité de l'unité est sans doute la raison, pourquoi tous les efforts de la Théorie ont jusqu'ici si peu réussi.

Or cet inconvénient devient encore beaucoup plus considérable lorsqu'on veut déterminer l'effet de l'action mutuelle de la Terre & de Venus; car supposant Venus en P & la Terre en Q, on aura les distances moyennes $p = 72340$ & $q = 100000$, d'où l'on tire $n = 0,94979$. Cette valeur approche déjà tant de l'unité, que la résolution mentionnée ci-dessus doit s'écarter très énormément de la vérité. Car supposant

$$(1 - n \cos. \Phi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} n \cos. \Phi + \frac{15}{8} n^2 \cos. \Phi^2$$

on aura pour la conjonction, où l'angle $\Phi = 0$

$$(1 - n)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} n + \frac{15}{8} n n.$$

Or on trouve la vraie valeur de la formule

$$(1 - n)^{-\frac{3}{2}} = 88,882$$

& la somme des trois termes ne donne que

$$1 + \frac{3}{2} n + \frac{15}{8} n n = 4,116.$$

Cette différence est sans doute extravagante. Considérons aussi le cas des oppositions, où $\Phi = 180^\circ$, & qu'on suppose

$$(1 + n)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} n + \frac{15}{8} n n;$$

or le premier membre de cette équation produit

$$(1 + n)^{-\frac{3}{2}} = 0,367$$

& les trois termes de l'autre membre donnent

$$1 - \frac{3}{2}n + \frac{15}{8}nn = 1,268.$$

D'où il est clair, qu'en employant cette méthode on risquera de se tromper très grossièrement.

Pour remédier à ce grand défaut je doute fort qu'on puisse découvrir une autre méthode, que celle, que j'ai exposée dans le Volume XVI des nouveaux Commentaires de l'Académie, où j'ai formé le plan de poursuivre quasi pas à pas les deux Planètes dans leur mouvement & de déterminer pour chaque petit intervalle de tems l'effet, que l'action de Venus doit produire dans le mouvement de la Terre; & nôtre habile Astronome, Mr. *Lexell*, a bien voulu se charger de son exécution, en faisant tous les calculs laborieux & pénibles, qu'il exigeoit, et qui lui ont fourni la table, qu'on y trouve ajoutée, pour la correction, à employer dans le lieu de la Terre, pour chaque situation par rapport à Venus. Or comme l'effet est toujours porportionnel à la masse de Venus, nous l'avons supposée égale à celle de la Terre, de sorte qu'en cas qu'elle fut ou plus grande ou plus petite, on n'auroit qu'à changer les nombres de la Table dans la même proportion.

On trouve aussi une telle correction dans les tables solaires de feu Mr. de la *Caille*, que je présume être calculée suivant la méthode ordinaire, dont je viens de démontrer l'insuffisance. Je me propose de comparer plus soigneusement cette table avec celle que Mr. *Lexell* a construite sur les véritables principes. Ce qui est d'autant plus facile, que l'une & l'autre se rapporte au même argument, qu'on trouve, en soustrayant la longitude

5. *Callitriche* — 1. 10.

Year	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039	2040	2041	2042	2043	2044	2045	2046	2047	2048	2049	2050	2051	2052	2053	2054	2055	2056	2057	2058	2059	2060	2061	2062	2063	2064	2065	2066	2067	2068	2069	2070	2071	2072	2073	2074	2075	2076	2077	2078	2079	2080	2081	2082	2083	2084	2085	2086	2087	2088	2089	2090	2091	2092	2093	2094	2095	2096	2097	2098	2099
1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039	2040	2041	2042	2043	2044	2045	2046	2047	2048	2049	2050	2051	2052	2053	2054	2055	2056	2057	2058	2059	2060	2061	2062	2063	2064	2065	2066	2067	2068	2069	2070	2071	2072	2073	2074	2075	2076	2077	2078	2079	2080	2081	2082	2083	2084	2085	2086	2087	2088	2089	2090	2091	2092	2093	2094	2095	2096	2097	2098	2099	

Table des Corrections
Du Lieu de la Terre
tant suivant la Table de Mr. de la Caille que suivant
les vrais principes.

Argument.
Longitude héliocentrique de ♀ — Longitude de ♂.

	O.		I.		II.		III.		IV.		V.		
	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	
	—	—	—	—	—	—	+	—	+	—	+	—	
0	0, 0	0,0	5, 6	13,8	0, 9	21,6	9, 4	20,6	15, 1	13,0	11, 4	4, 4	30
1	0, 3	0,5	5, 6	14,2	0, 6	21,7	9, 7	20,4	15, 1	12,7	11, 1	4, 1	29
2	0, 6	1,0	5, 6	14,6	0, 3	21,8	10, 0	20,2	15, 2	12,4	10, 8	3, 9	28
3	0, 9	1,5	5, 6	15,0	+	21,9	10, 3	20,0	15, 2	12,1	10, 5	3, 7	27
4	1, 2	2,0	5, 5	15,4	0, 5	22,0	10, 6	19,8	15, 2	11,8	10, 3	3, 5	26
5	1, 4	2,4	5, 5	15,7	0, 8	22,1	10, 8	19,6	15, 2	11,5	10, 0	3, 3	25
6	1, 7	2,9	5, 4	16,1	1, 1	22,2	11, 1	19,4	15, 1	11,2	9, 7	3, 1	24
7	1, 9	3,4	5, 4	16,5	1, 4	22,2	11, 4	19,2	15, 1	10,9	9, 3	2, 9	23
8	2, 2	3,9	5, 3	16,8	1, 8	22,3	11, 7	19,0	15, 1	10,6	8, 9	2, 7	22
9	2, 4	4,4	5, 2	17,1	2, 2	22,3	11, 9	18,8	15, 0	10,3	8, 6	2, 5	21
10	2, 7	4,8	5, 1	17,4	2, 6	22,3	12, 2	18,5	15, 0	10,0	8, 3	2, 3	20
11	2, 9	5,3	5, 0	17,8	2, 9	22,3	12, 4	18,3	14, 9	9,7	7, 9	2, 1	19
12	3, 1	5,8	4, 9	18,1	3, 2	22,3	12, 7	18,1	14, 9	9,4	7, 5	1, 9	18
13	3, 3	6,3	4, 8	18,4	3, 6	22,3	12, 9	17,9	14, 8	9,1	7, 1	1, 7	17
14	3, 5	6,8	4, 6	18,7	3, 9	22,2	13, 2	17,6	14, 7	8,8	6, 7	1, 6	16
15	3, 7	7,3	4, 5	18,9	4, 3	22,2	13, 4	17,3	14, 5	8,5	6, 4	1, 5	15
16	3, 9	7,8	4, 3	19,2	4, 6	22,2	13, 6	17,1	14, 4	8,2	6, 0	1, 3	14
17	4, 1	8,3	4, 1	19,5	4, 9	22,1	13, 8	16,8	14, 3	7,9	5, 6	1, 1	13
18	4, 3	8,8	3, 9	19,7	5, 3	22,1	13, 9	16,5	14, 2	7,6	5, 2	1, 0	12
19	4, 5	9,2	3, 6	19,9	5, 7	22,0	14, 1	16,2	14, 1	7,3	4, 8	0, 9	11
20	4, 7	9,6	3, 4	20,1	6, 1	21,9	14, 2	15,9	13, 9	7,0	4, 4	0, 8	10
21	4, 8	10,1	3, 2	20,3	6, 5	21,8	14, 3	15,7	13, 7	6,7	3, 9	0, 6	9
22	4, 9	10,6	2, 9	20,5	6, 8	21,7	14, 4	15,4	13, 5	6,4	3, 5	0, 5	8
23	5, 0	11,0	2, 7	20,7	7, 2	21,6	14, 5	15,1	13, 3	6,1	3, 1	0, 4	7
24	5, 1	11,4	2, 5	20,9	7, 5	21,5	14, 6	14,8	13, 0	5,9	2, 7	0, 3	6
25	5, 2	11,8	2, 2	21,0	7, 9	21,3	14, 7	14,5	12, 8	5,7	2, 3	0, 2	5
26	5, 3	12,2	1, 9	21,2	8, 2	21,2	14, 8	14,2	12, 5	5,4	1, 8	0, 2	4
27	5, 4	12,6	1, 7	21,3	8, 5	21,1	14, 9	13,9	12, 3	5,1	1, 4	0, 1	3
28	5, 5	13,0	1, 4	21,4	8, 8	21,0	15, 0	13,6	12, 0	4,8	1, 0	0, 1	2
29	5, 5	13,4	1, 1	21,5	9, 1	20,8	15, 1	13,3	11, 7	4,6	0, 5	0, 0	1
30	5, 6	13,8	0, 9	21,6	9, 4	20,6	15, 1	13,0	11, 4	4,4	0, 0	0, 0	0
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	
	XI.		X.		IX.		VIII.		VII.		VI.		

gitude moyenne de la Terre, vuë du Soleil, de la longitude héliocentrique moyenne de Venus. La table ci-jointe peut servir à faciliter cette comparaison entre les deux tables des corrections mentionnées, & en la considérant plus attentivement elles nous fournit les réflexions suivantes.

I. Designons d'abord l'argument de cette Table par la lettre Φ , qui marque comme ci-dessus l'angle au Soleil compris entre les lieux de la Terre & de Venus, & on voit d'abord, que tant pour $\Phi = 0$ que $\Phi = VI$. signes l'une & l'autre équation évanouit. Ensuite on voit que la plus grande équation de nos tables est plus grande que celle de Mr. de la Caille; mais ce n'est pas au défaut de la Théorie qu'il faut attribuer cette différence, qui provient uniquement de l'estime de la masse de Venus, que j'ai supposée égale à la Terre; fondé sur la véritable parallaxe du Soleil de $8''$, pendant que Mr. Clairaut, sur la Théorie du quel les Tables de Mr. de la Caille sont fondées, l'a supposée de $10''$; d'où le volume de Venus se conclut environ deux tiers de la Terre, ce qui est très bien d'accord avec les valeurs de la plus grande équation, qui dans ma table monte à 22, 3 & dans la Table de Mr. de la Caille à 15, 2. Nous avons supposé ici l'un & l'autre, que les masses sont en raison des volumes; donc si, comme le grand Newton a soutenu, la densité des Planètes est plus grande dans celles qui sont les plus proches du Soleil, il faudroit encore augmenter la plus grande équation.

II. En partant de la conjonction, où $\Phi = 0$, les équations de notre table augmentent beaucoup plus que dans celle de Mr. de la Caille, & cette augmentation s'étend

aussi beaucoup plus loin, puisque dans notre table elles croissent jusqu'à $\Phi = 2^{\circ}. 8^{\circ}$, pendant que dans celle de *la Caille* l'équation atteint la plus grande valeur à $\Phi = 30^{\circ}$. Cette différence provient ouvertement de la fausseté de la Théorie, puisque on y suppose l'action de Venus sur la Terre environ 20 fois plus petite, qu'elle n'est effectivement comme nous avons observé ci-dessus. Donc puisque cette action est en effet tant de fois plus grande, il s'ensuit nécessairement que son effet doit être beaucoup plus grand & qu'il se doit aussi étendre plus loin.

III. Le contraire arrive après les oppositions, où $\Phi > VI^{\circ}$. où la véritable action de Venus est presque quatre fois plus petite que la fausse Theorie la suppose, comme nous avons déjà remarqué ci-dessus. Il faut donc aussi que dans notre table les équations croissent plus faiblement que dans la Table de Mr. de la Caille, & en regardant notre table de comparaison, on voit qu'elles diffèrent réellement de la même manière comme nous venons d'observer.

IV. Ensuite il se trouve aussi une grande différence entre les endroits répondans aux plus grandes équations, qui sont, après les conjonctions, selon les tables de Mr. de la Caille, à $\Phi = 30^{\circ}$. & dans ma table à $\Phi = 2^{\circ}. 8^{\circ}$. & après l'opposition, selon les premières à $\Phi = 7^{\circ}. 25^{\circ}$. & selon la mienne à $\Phi = 9^{\circ}. 17^{\circ}$. Or la plus grande différence se trouve dans la marche de ces équations; puisque dans la table construite sur les vrais principes les équations conservent le même signe depuis la conjonction jusqu'à l'opposition, pendant que dans les tables de Mr. de la Caille elles changent de signe à $\Phi = 2^{\circ}. 3^{\circ}$.

V. Remarquons aussi les endroits, où la différence entre les deux Tables devient la plus grande, ce qui arrive à $\Phi = 3^{\circ}.12'$. où elle monte à $30,8''$. Donc si pour une telle situation on calcule le lieu de la Terre selon les tables de la Caille, on se trompera de plus du $30''$; & partant on ne doit pas être surpris, quand Mr. de la Caille avoue lui même, que ses tables peuvent quelques fois différer des observations d'autant de secondes; & peut-être seront-ce les mêmes cas, où la table des perturbations de Venus diffère si énormément de la vérité, parce que depuis $\Phi = 2^{\circ}$. jusqu'à $\Phi = 4^{\circ}.22'$. c'est à dire pendant un intervalle de $82'$. la différence entre les deux tables monte au de là de $20''$.

VI. Puisque Mr. de la Caille dit avoir calculé cette table sur les formules de feu Mr. Clairaut, il sera aisé de retrouver ces formules des équations mêmes de la Table, vu qu'il est certain que cette formule doit avoir une telle forme: $\alpha \sin. \Phi + \beta \sin. 2 \Phi + \gamma \sin. 3 \Phi + \&c$. Car on n'a qu'à tirer de cette formule les équations pour quelques situations principales. que nous ajouterons ici dans cette table, en marquant les équations, qui en résultent, par les lettres A, B, C, D, &c.

$$\begin{array}{lcl}
 3^{\circ}. & - & A = \alpha - \gamma \\
 2. & - & B = \frac{\alpha \sqrt{3}}{2} + \frac{\beta \sqrt{3}}{2} - \frac{\delta \sqrt{3}}{2} \\
 4. & - & C = \frac{\alpha \sqrt{3}}{2} - \frac{\beta \sqrt{3}}{2} + \frac{\delta \sqrt{3}}{2} \\
 1.15^{\circ} & - & D = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \beta + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \\
 4.15 & - & E = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \beta + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \\
 1. & - & F = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta \sqrt{3}}{2} + \gamma + \frac{\delta \sqrt{3}}{2} \\
 5. & - & G = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta \sqrt{3}}{2} + \gamma - \frac{\delta \sqrt{3}}{2}
 \end{array}$$

De ces équations nous déduisons les combinaisons suivantes :

$$B + C = \alpha \sqrt{3} \text{ \& } B - C = \beta \sqrt{3} - \delta \sqrt{3},$$

$$D + E = \alpha \sqrt{2} + \gamma \sqrt{2} \text{ \& } D - E = 2\beta,$$

$$F + G = \alpha + 2\gamma \text{ \& } F - G = \beta \sqrt{3} + \delta \sqrt{3}.$$

Appliquons maintenant ces formules à la table de Mr. de la Caille, & nous aurons :

$$A = 9, 4, B = -0, 9, C = 15, 1, D = -4, 5,$$

$$E = 14, 5, F = -5, 6, G = 11, 4.$$

De là on tire

$$A = \alpha - \gamma = 9, 4$$

$$B + C = \alpha \sqrt{3} = 14, 2$$

$$B - C = \beta \sqrt{3} - \delta \sqrt{3} = -16, 0$$

$$D + E = \alpha \sqrt{2} + \gamma \sqrt{2} = 10, 0$$

$$D - E = 2\beta = -19, 0$$

$$F + G = \alpha + 2\gamma = 5, 8$$

$$F - G = \beta \sqrt{3} + \delta \sqrt{3} = -17, 0$$

& de ces équations on tire $\alpha = 8, 2$, $\beta = -9, 5$, $\gamma = -1, 2$, $\delta = -0, 3$. Voilà donc la formule de Mr. Clairaut, sur laquelle l'Abé de la Caille a calculé sa table, qui donne pour chaque argument Φ l'équation Venérienne $8, 2. \sin. \Phi - 9, 5 \sin. 2\Phi - 1, 2 \sin. 3\Phi - 0, 3 \sin. 4\Phi$.

VII. Quelque fausse que soit cette formule elle a pourtant depuis été adoptée de presque tous les Astronomes, vu qu'on trouve la même table dans tous les recueils de tables astronomiques qui ont été publiés depuis ce temps, & même la trouve t-on, à quelques arrangemens de la forme près, dans les tables lunaires de feu Mr. Mayer, publiées à Londres, qu'on regarde comme les plus exactes.

Or

Or après les remarques, que j'ai rapportées ici, on ne fçauroit plus douter, qu'en se servant de ces tables, on ne se trompe très souvent de 20 à 30 secondes, ce qui doit avoir une influence très essentielle dans les tables lunaires, où la détermination du vrai lieu de la Lune suppose toujours celle du Soleil, & partant cette observation doit être de la dernière importance dans le grand Problème de la Longitude.

VIII. Comme nôtre table n'a été calculée sur aucune formule semblable: mais qu'elle renferme le résultat de toutes les actions élémentaires ajoutées ensemble il n'est gueres probable, qu'on puisse trouver une formule, qui représente exactement toutes les équations de cette table. Cependant il ne sera pas difficile de déterminer les coefficients α , β , γ , δ , enforte que la formule répond au moins à peu près à la vérité.

Faisons un essai la dessus & nous aurons pour les positions principales indiquées ci-dessus les valeurs suivantes: $A = -27,6$, $B = -21,6$, $C = -13,0$, $D = -18,9$, $E = -8,5$, $F = -13,8$, $G = -4,4$. De là on tire les égalités suivantes: 1°. $\alpha - \gamma = -20,6$; 2°. $\alpha \sqrt{3} = -34,6$; 3°. $(\beta - \delta) \sqrt{3} = -8,6$; 4°. $(\alpha + \gamma) \sqrt{2} = -27,4$; 5°. $2\beta = -10,4$; 6°. $\alpha + 2\gamma = -18,2$; 7°. $(\beta + \delta) \sqrt{3} = -9,4$; d'où l'on tire les valeurs α , β , γ , δ de cette manière: Cherchons les valeurs des lettres α & γ , & d'abord la seconde équation donne $\alpha = -20,0$, ce qui étant substitué dans la première fournit $\gamma = +0,6$. Or de la quatrième on tire $\gamma = +0,5$, & de la sixième $\gamma = 0,9$. Mais puisque ces trois valeurs de γ ne quadrent pas assez

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I. Q q bien

bien ensemble, il faut reconnoître une petite erreur dans l'une & l'autre des deux lettres α & γ , & cette erreur sera partagée également, en prenant $\alpha = -19,7$ & $\gamma = +0,8$. Pour les deux autres lettres β & δ la 5^e. équation donne d'abord $\beta = -5,2$ & la 3^e & 7^e, jointes ensemble, donnent $2\beta = -10,4$, de sorte que nous pouvons hardiment supposer $\beta = -5,2$. Enfin la 7^e. — la 3^e. nous fournit $\delta = -0,2$.

IX. Voilà donc contre toute nôtre attente une formule, qui représente les équations de nôtre table plus exactement qu'on n'auroit osé espérer. Sçavoir pour chaque argument Φ l'équation de nôtre table se trouve être $-19,7 \sin. \Phi - 5,2 \sin. 2\Phi + 0,8 \sin. 3\Phi - 0,2 \sin. 4\Phi$, & cette formule ne diffère presque du tout des positions, d'où nous l'avons tirée. Voyons donc comment elle satisfait à d'autres positions, & pour cet effet prenons $\Phi = 2^{\circ}. 15^{\circ}. = 75^{\circ}$. d'où en faisant le calcul on tire de la formule l'équation 22, 0, qui ne diffère que de 5'' de la table. Prenons aussi $\Phi = 3^{\circ}. 15' = 105^{\circ}$. & en faisant le calcul on trouve 17, 2 ce qui ne diffère que de 0, 1'' de la table. En examinant les cas $\Phi = 15^{\circ}$. & $\Phi = 5^{\circ}. 15' = 165^{\circ}$. on trouve les équations 7, 3 & 1, 7. dont les erreurs ne sont que 0, 0'' & 0, 2''.

X. Ce merveilleux accord de la formule que nous venons de trouver avec nôtre table ne sçauroit certainement être attribué à un pur hazard, & on pourroit même soupçonner que Mr. *Lexell* eut calculé cette table précisément sur cette même formule, si le détail de tout le calcul ne se trouvoit pas exposé dans les commentaires. Nous devons donc conclure, que cette formule est fondée réellement dans la véritable théorie, ce qui ouvre une

nouvelle carrière pour perfectionner la Théorie, & tout revient maintenant, à sçavoir manier la Théorie en sorte, qu'on en puisse précisément tirer la formule dont nous venons de parler.

XI. Puisque les corrections, qu'on a données jusqu'ici pour les inégalités de Saturne, causées par l'action de Jupiter, sont tirées de la même fausse Théorie, on ne doit pas être surpris, qu'elles répondent si mal aux observations, & comme le cas est presque semblable à celui de la Terre & de Venus, on pourra à présent presque deviner la véritable formule, d'où l'on doit tirer les inégalités. Ainsi dans la formule $\alpha \sin. \Phi + \beta \sin. 2 \Phi + \gamma \sin. 3 \Phi + \delta \sin. 4 \Phi$ le premier coefficient α , qui selon la méthode commune étoit positif, doit être négatif & même beaucoup plus grand; ensuite le second coefficient demeure bien négatif, mais il doit être diminué. Pour les deux autres coefficients γ & δ ils influenceront fort peu sur le lieu de Saturne. Mais il faut ici bien considérer que la force de Jupiter exerce encore un autre effet sur Saturne, qui provient de l'excentricité de leurs orbites, ce qui est une circonstance, à la quelle on n'a pas eu besoin de faire attention dans les orbites de la Terre de Venus, puisque l'excentricité de l'une & de l'autre est si petite, qu'il n'en sçauroit résulter un effet considérable.

INVESTIGATIO PERTVRBATIONVM,
QVAE
IN MOTV TERRAE
AB
ACTIONE VENERIS
PRODVCVNTVR.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Tab. XIII. **E**xistente Sole in S fit AT orbita Terrae, BV Veneris, ambae in plano eclipticae sitae. Sumamus autem initio, vnde tempora metimur, ambos Planetas fuisse in coniunctione i. e. in A et B; nunc vero elapso tempore t , cui motus Terrae medius respondeat $= \theta$, Terram versari in T, venerem vero in V, vocemusque angulos $AST = \phi$ et $BSV = \psi$; tum vero fit angulus $TSV = \eta$, ita vt fit $\eta = \psi - \phi$, et iam η designet elongationem Veneris a Terra, ex Sole visam. Praeterea vocetur distantia Terrae a Sole $ST = v$; Veneris autem distantia SV vt constans spectetur, sitque $SV = a$. Denique statuatur distantia Veneris a Terra $TV = w$, ita vt $w = \sqrt{vv + aa - 2av \cos. \eta}$.

§. 2. Exprimatur jam massa Solis per unitatem sitque massa Terrae $= m$, quam ex Parallaxi Solis con-

clusimus $= \frac{1}{1000000}$, eique massam Veneris aequalem supponamus. His positis Terra ad Solem sollicitabitur in directione TS, vi $= \frac{m+1}{v^2}$ et a Venere sollicitabitur in directione TV, vi $= \frac{m}{w^2}$. Denique quia etiam Sol, a Venere vrgetur vi $= \frac{m}{a^2}$, haec vis contrario modo, secundum directionem VS, Terrae est applicanda. Has autem ternas vires ad duas revocare licet, complendo parallelogrammum STOV; tum enim vis TV $= \frac{m}{w^2}$ resoluétur in vim secundum TS $= \frac{mv}{w^3}$ et in vim secundum TO $= \frac{ma}{w^3}$, cuius directio convenit cum directione SV. Hinc ergo omnino Terra sollicitabitur in directione TS,

$$vi = \frac{1+m}{v^2} + \frac{mv}{w^3};$$

tum vero etiam in directione VS,

$$vi = \frac{m}{a^2} - \frac{ma}{w^3}.$$

§. 3. Inuentis his viribus ex T ad axem SA demittatur perpendicularum TX, et vocentur binae coordinatae SX = x et XT = y, secundum quas ambae vires sollicitantes, resoluantur, vnde orietur vis secundum SX

$$= - \frac{(v+m) \cos. \Phi}{v^2} - \frac{mv \cos. \Phi}{w^3} - \frac{m \cos. \Psi}{a^2} + \frac{ma \cos. \Psi}{w^3}$$

et vis secundum XT

$$= - \frac{(1-m) \sin. \Phi}{v^2} - \frac{mv \sin. \Phi}{w^3} - \frac{m \sin. \Psi}{a^2} + \frac{ma \sin. \Psi}{w^3}$$

quibus viribus cum accelerationes debeant esse aequales, quae sunt secundum easdem directiones $\frac{ddx}{d\theta^2}$ & $\frac{ddy}{d\theta^2}$, habebuntur hae duae aequationes:

$$\begin{aligned} \frac{ddx}{d\theta^2} &= - \frac{(1+m) \cos. \Phi}{v^2} - \frac{mv \cos. \Phi}{w^3} - \frac{m \cos. \Psi}{a^2} + \frac{ma \cos. \Psi}{w^3} \\ \frac{ddy}{d\theta^2} &= - \frac{(1-m) \sin. \Phi}{v^2} - \frac{mv \sin. \Phi}{w^3} - \frac{m \sin. \Psi}{a^2} + \frac{ma \sin. \Psi}{w^3} \end{aligned}$$

ex quibus aequationibus omnia repeti debent, quae ad institutum nostrum desiderantur.

§. 4. Cum jam sit $x = v \cos. \Phi$ et $y = v \sin. \Phi$ erit $dx = dv \cos. \Phi - v d\Phi \sin. \Phi$ et $dy = dv \sin. \Phi + v d\Phi \cos. \Phi$; porro vero

I. $ddx = ddv \cos. \Phi - 2dv d\Phi \sin. \Phi - v d\Phi^2 \cos. \Phi - v dd\Phi \sin. \Phi$
 II. $ddy = ddv \sin. \Phi + 2dv d\Phi \cos. \Phi - v d\Phi^2 \sin. \Phi + v dd\Phi \cos. \Phi$
 ex quibus formulis per combinationem colliguntur sequentes :

$$\text{I. } ddy \cos. \Phi - ddx \sin. \Phi = 2 dv d\Phi + v dd\Phi$$

$$\text{II. } ddx \cos. \Phi + ddy \sin. \Phi = ddv - v d\Phi^2.$$

Hic iam loco ddx et ddy valores ex primis aequationibus, ex actione virium ortis, substituantur, prodibitque

$$\begin{aligned} \frac{2dv d\Phi + v dd\Phi}{a\theta^2} &= -\frac{m}{aa} (\sin. \psi \cos. \Phi - \cos. \psi \sin. \Phi) \\ &\quad + \frac{ma}{v\theta^2} (\sin. \psi \cos. \Phi - \cos. \psi \sin. \Phi) \\ \frac{ddv - v d\Phi^2}{a\theta^2} &= -\frac{(1+m)}{vv} - \frac{mv}{v\theta^2} - \frac{m}{aa} (\cos. \psi \cos. \Phi + \sin. \psi \sin. \Phi) \\ &\quad + \frac{ma}{v\theta^2} (\cos. \psi \cos. \Phi + \sin. \psi \sin. \Phi) \end{aligned}$$

sive ob $\psi - \Phi = \eta$ erit

$$\begin{aligned} \frac{2dv d\Phi + v dd\Phi}{a\theta^2} &= \frac{ma}{v\theta^2} \sin. \eta - \frac{m}{aa} \sin. \eta \\ \frac{ddv - v d\Phi^2}{a\theta^2} &= -\frac{(1+m)}{vv} - \frac{mv}{v\theta^2} - \frac{m}{aa} \cos. \eta + \frac{ma}{v\theta^2} \cos. \eta. \end{aligned}$$

§. 5. Hic totum negotium pendet ab idonea euolutione membrorum per ω^3 diuisorum, vnde reliquas aequationum partes ad sinistram transponamus, vt aequationes nanciscamur huius formae:

$$\begin{aligned} \frac{2dv d\Phi + v dd\Phi}{a\theta^2} + \frac{m}{aa} \sin. \eta &= \frac{ma}{v\theta^2} \sin. \eta \\ \frac{ddv - v d\Phi^2}{a\theta^2} + \frac{1+m}{vv} + \frac{m \cos. \eta}{aa} &= \frac{m}{v\theta^2} (a \cos. \eta - v) \end{aligned}$$

Vidi-

Vidimus autem initio, esse $w = \sqrt{v v + a a - 2 a v \cos. \eta}$, vbi, quia hi termini, vtpote littera m affecti, per se sunt quam minimi, etiam distantiam v tanquam constantem spectare licebit, siquidem ab excentricitate orbitae Terrae mentem abstrahamus, quippe quae non solum est satis parua, sed etiam in praesenti negotio nihil in actione Veneris mutare est censenda; quam ob causam loco v scribamus distantiam mediam Terrae a Sole, quam ponimus $= 1$, sicque erit $w = \sqrt{1 + a a - 2 a \cos. \eta}$, ideoque

$$w = \sqrt{1 + a a} \sqrt{1 - \frac{2a}{1+aa} \cos. \eta},$$

vbi loco $\frac{2a}{1+aa}$ scribamus litteram n , cuius valor, ob distantiam mediam Veneris a Sole $a = 0,72344$, erit $n = 0,94979$. Erit autem nunc

$$\frac{m}{w^3} = \frac{m}{(1 + a a)^{\frac{3}{2}}} (1 - n \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}}$$

sive, si breuitatis gratia ponatur

$$\frac{m}{(1 + a a)^{\frac{3}{2}}} = \mu, \text{ erit } \frac{m}{w^3} = \mu (1 - n \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}},$$

vbi notetur esse $\mu = 0,0000015 \Phi$.

§. 6. Alio autem loco hanc formulam irrationalem pro hoc ipso casu iam euolui, atque inueni esse

$(1 - n \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}} = A + B \cos. \eta + C \cos. 2 \eta + D \cos. 3 \eta + \text{etc.}$
 et pro his litteris A, B, C, etc. sequentes exactissimos, methodo prorsus singulari, adeptus sum valores:

$$\begin{aligned} A &= 9,39852; & B &= 16,68153; & C &= 13,87191 \\ D &= 11,17685; & E &= 8,80776; & F &= 6,85236 \\ G &= 5,26990; & H &= 4,04433; & I &= 3,08789. \end{aligned}$$

Horum autem valorum numericorum loco in calculo retineamus litteras A, B, C, etc.

§. 7. Quoniam igitur in nostra priore aequatione continetur membrum

$$\frac{m a \sin. \eta}{v^3} = \mu a \sin. (A + B \cos. \eta + C \cos. 2 \eta + D \cos. 3 \eta + \text{etc.})$$

facta evolutione hoc membrum ita erit expressum

$$\mu a \left(A \sin. \eta + \frac{1}{2} B \sin. 2 \eta + \frac{1}{2} C \sin. 3 \eta + \frac{1}{2} D \sin. 4 \eta + \text{etc.} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} C \sin. \eta - \frac{1}{2} D \sin. 2 \eta - \frac{1}{2} E \sin. 3 \eta - \frac{1}{2} F \sin. 4 \eta - \text{etc.} \right)$$

Pro alterius vero aequationis membro dextro erit primo

$$\frac{m a \cos. \eta}{v^3} = \mu a \cos. \eta (A + B \cos. \eta + C \cos. 2 \eta + D \cos. 3 \eta + \text{etc.})$$

sive facta evolutione

$$\frac{m a \cos. \eta}{v^3} = \mu \left(\frac{1}{2} B + A \cos. \eta + \frac{1}{2} B \cos. 2 \eta + \frac{1}{2} C \cos. 3 \eta + \text{etc.} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} C \cos. \eta + \frac{1}{2} D \cos. 2 \eta + \frac{1}{2} E \cos. 3 \eta + \text{etc.} \right)$$

Pro altera vero eiusdem membri parte, quae est $-\frac{mv}{v^3}$, tuto assumere licet $v = 1$, quoniam supponimus, actione Veneris sublata, Terram in circulo esse progressuram; sicque ista pars dabit,

$$-\mu (A + B \cos. \eta + C \cos. 2 \eta + D \cos. 3 \eta + \text{etc.})$$

Hanc ob rem si pro vtraque parte iunctim sumpta ponamus hanc seriem:

$$\mu (A' + B' \cos. \eta + C' \cos. 2 \eta + D' \cos. 3 \eta + \text{etc.}) \text{ erit.}$$

$$A' = \frac{1}{2} a B - A; B' = \frac{1}{2} a (2 A + C) - B; C' = \frac{1}{2} a (B + D) - C$$

$$D' = \frac{1}{2} a (C + E) - D; E' = \frac{1}{2} a (D + F) - E; \text{ etc.}$$

cui ergo expressioni: $\mu (A' + B' \cos. \eta + C' \cos. 2 \eta + \text{etc.})$

aequale esse debet membrum sinistrum

$$\frac{d d v - v d \Phi^2}{d \beta^2} + \frac{1}{v} \frac{m}{v} + \frac{m \cos. \eta}{a a}.$$

§. 8. Incipiamus nunc ab evolutione primae aequationis, et quoniam assumimus Terram sine actione Veneris

neris in circulo motu vniformi esse processuram in distantia media = 1, ita vt etiam foret $\Phi = \theta$, ideoque $\frac{d\Phi}{d\theta} = 1$; nunc accedente actione Veneris hae quantitates quasi infinite parum immutabuntur. Statuamus ergo tum fore

$$v = 1 + \mu p \text{ ac } \frac{d\Phi}{d\theta} = 1 + \mu q;$$

vnde in compositione membra, quae continerent μ^2 , tuto omitti poterunt. Cum igitur sit

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\mu dp}{d\theta} \text{ et } \frac{d\frac{d\Phi}{d\theta}}{d\theta} = \frac{\mu dq}{d\theta},$$

oritur hinc sequens aequatio:

$$\frac{2vd\Phi + vdd\Phi}{d\theta^2} + \frac{m}{a} \sin. \eta = \frac{2\mu dp + \mu dq}{d\theta} + \frac{m}{a} \sin. \eta \\ = \frac{m}{a} \sin. \eta.$$

Pro cuius parte dextra scribamus hanc seriem:

$$\mu (\mathfrak{B} \sin. \eta + \mathfrak{C} \sin. 2\eta + \mathfrak{D} \sin. 3\eta + \mathfrak{E} \sin. 4\eta + \text{etc.})$$

ita vt ob resolutionem huius membri iam supra traditam sit

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2} a (2A - C); \mathfrak{C} = \frac{1}{2} a (B - D); \mathfrak{D} = \frac{1}{2} a (C - E); \\ \mathfrak{E} = \frac{1}{2} a (D - F); \mathfrak{F} = \frac{1}{2} a (E - G); \text{etc.}$$

atque hinc aequatio resoluenda erit

$$\frac{2dp + dq}{d\theta} + \frac{m}{\mu a} \sin. \eta = \mathfrak{B} \sin. \eta + \mathfrak{C} \sin. 2\eta + \mathfrak{D} \sin. 3\eta + \text{etc.}$$

vbi notetur esse $\frac{m}{\mu a} = \frac{(1 + aa)^{\frac{1}{2}}}{aa}$, quem numerum bre-

uitatis gr. per litteram k designemus, ita vt sit

$k = 3,592551$, et nostra aequatio nunc erit

$$\frac{2dp + dq}{d\theta} + k \sin. \eta = \mathfrak{B} \sin. \eta + \mathfrak{C} \sin. 2\eta + \mathfrak{D} \sin. 3\eta + \text{etc.}$$

quam igitur integrari oportet.

§. 9. Quoniam hic duo anguli η et θ insunt, nosse oportet relationem $d\eta$ et $d\theta$. Erat autem

$$\eta = \psi - \phi, \text{ unde fit } \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{d\psi}{d\theta} - \frac{d\phi}{d\theta}.$$

Hoc autem loco vtrumque motum Terrae ac Veneris vt vniformem spectare licet, ita vt fit $\frac{d\psi}{d\theta} = 1$. Pro Venere autem, eius motus diurnus in tabulis exhibetur $= 1^\circ, 36', 9'' = 5769''$, dum pro Terra est $59', 8'' = 3548''$. Quocirca habemus

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{5769}{3548}, \text{ vnde fit } \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{2221}{3548}.$$

Ponamus autem

$$d\theta = i d\eta, \text{ critque } i = \frac{3548}{2221} = 1,597479.$$

Nunc igitur manifestum est, aequationem nostram, per $d\theta = i d\eta$ multiplicatam, euadere integrabilem; reperietur enim

$$2p + q - ik \cos.\eta = \Delta - i\mathfrak{B} \cos.\eta - \frac{1}{2}i\mathfrak{C} \cos.2\eta - \frac{1}{3}i\mathfrak{D} \cos.3\eta - \text{etc.}$$

ex qua propterea fit

$$q = \Delta - 2p + i(k - \mathfrak{B}) \cos.\eta - \frac{1}{2}i\mathfrak{C} \cos.2\eta - \frac{1}{3}i\mathfrak{D} \cos.3\eta - \text{etc.}$$

§. 10. Aggrediamur iam posteriorem aequationem, pro qua notetur fore $\frac{ddv}{a\theta^2} = \frac{\mu dd p}{a\theta^2}$, tum vero

$$\frac{vd\Phi^2}{d\theta^2} = 1 + \mu(2q + p), \text{ et } \frac{1+m}{v v} = \frac{1+m}{1+2\mu p}$$

sive supra et infra per $1 - 2\mu p$ multiplicando erit

$$\frac{1+m}{v v} = 1 + m - 2\mu p$$

quibus valoribus substitutis aequationis nostrae membrum finistrum erit.

$$\frac{\mu dd p}{a\theta^2} - \mu(3p + 2q) + m + \frac{m \cos.\eta}{a a}.$$

Quod si iam per μ dividamus, et loco $\frac{m}{\mu a a} = 3,592551$ scribamus k , loco $\frac{\pi}{\mu} = 1,880217$ vero scribamus l , posterior aequatio hanc induet formam:

$$\frac{ddp}{d\theta^2}$$

$$\frac{d^2 p}{d\theta^2} = 3p - 2q + l + k \cos.\eta = A' + B' \cos.\eta + C' \cos.2\eta + D' \cos.3\eta \text{ etc.}$$

in qua si loco q valor ante inuentus substituitur, fiet

$$\frac{d^2 p}{d\theta^2} = 3p + l + k \cos.\eta = A' + B' \cos.\eta + C' \cos.2\eta + D' \cos.3\eta + \text{etc.}$$

$$+ 4p - 2\Delta + 2i(k - \mathfrak{B}) \cos.\eta - \frac{1}{2}i\mathfrak{C} \cos.2\eta - \frac{2}{3}i\mathfrak{D} \cos.3\eta - \text{etc.}$$

$$\text{siue } \frac{d^2 p}{d\theta^2} + p = 2\Delta - l + A' + (2i(k - \mathfrak{B}) - k + B') \cos.\eta + (C' - \frac{1}{2}i\mathfrak{C}) \cos.2\eta \\ + (D' - \frac{2}{3}i\mathfrak{D}) \cos.3\eta + (E' - \frac{2}{4}i\mathfrak{E}) \cos.4\eta + \text{etc.}$$

cuius loco brevitatis gratia scribamus

$$\frac{d^2 p}{d\theta^2} + p = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' \cos.\eta + \mathfrak{C}' \cos.2\eta + \mathfrak{D}' \cos.3\eta + \text{etc.}$$

ita vt fit

$$\mathfrak{A}' = 2\Delta - l + A'; \mathfrak{B}' = 2i(k - \mathfrak{B}) - k + B'; \mathfrak{C}' = C' - i\mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{D}' = D' - \frac{2}{3}i\mathfrak{D}; \mathfrak{E}' = E' - \frac{2}{4}i\mathfrak{E}; \text{ etc.}$$

§. 11. Manifestum autem est, huic aequationi satisfieri, statuendo

$p = \alpha + \beta \cos.\eta + \gamma \cos.2\eta + \delta \cos.3\eta + \text{etc.}$
vnde ob $\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{1}{i}$ membrum finistrum resoluitur in has duas series:

$$\frac{d^2 p}{d\theta^2} = -\frac{\beta}{ii} \cos.\eta - \frac{4\gamma}{ii} \cos.2\eta - \frac{9\delta}{ii} \cos.3\eta - \frac{16\epsilon}{ii} \cos.4\eta - \text{etc.}$$

$$+ p = \alpha + \beta \cos.\eta + \gamma \cos.2\eta + \delta \cos.3\eta + \epsilon \cos.4\eta + \text{etc.}$$

ita vt, singulis ambarum partium membris seorsim aequatis, se prodeant sponte sequentes determinationes:

$$\alpha = \mathfrak{A}'; \beta(1 - \frac{1}{ii}) = \mathfrak{B}'; \gamma(1 - \frac{4}{ii}) = \mathfrak{C}'; \delta(1 - \frac{9}{ii}) = \mathfrak{D}'; \text{ etc.}$$

ideoque

$$\alpha = \mathfrak{A}'; \beta = \frac{\mathfrak{B}'}{1 - \frac{1}{ii}}; \gamma = \frac{\mathfrak{C}'}{1 - \frac{4}{ii}}; \delta = \frac{\mathfrak{D}'}{1 - \frac{9}{ii}}; \epsilon = \frac{\mathfrak{E}'}{1 - \frac{16}{ii}}.$$

§. 12. Cum igitur ex valoribus litterarum A, B, C, D, etc. supra §. 6. inuentis facile colligi queant va-

lores deriuati A' , B' , C' , D' , etc. tum vero \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , etc. ac denique \mathcal{A}' , \mathcal{B}' , \mathcal{C}' , \mathcal{D}' , etc. ex iis iam deduci possunt α , β , γ , δ , etc. unde porro innotescunt valores p & q , quarum prior praebet exiguum illam mutationem quam actio Veneris in distantia Terrae et Sole producit, cum sit $v = +\mu p$. Denique ex valore p deriuatur valor ipsius q quem breu. gr. statuamus:

$q = \alpha' + \beta' \cos. \eta + \gamma' \cos. 2\delta + \delta' \cos. 3\eta + \text{etc.}$
ita ut sit

$$\alpha' = \Delta - 2\alpha; \beta' = i(k - \mathcal{B}) - 2\beta; \gamma' = -2\gamma - \frac{1}{2}i\mathcal{C},$$

$$\delta' = -2\delta - \frac{1}{2}i\mathcal{D}; \epsilon' = -2\epsilon - \frac{1}{2}i\mathcal{E}; \text{etc.}$$

Inuento autem valore q inde colligitur series

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = 1 + \mu\alpha' + \mu\beta' \cos. \eta + \mu\gamma' \cos. 2\eta + \text{etc.}$$

ex qua pro quouis tempore vera Solis longitudo concluditur fore

$\Phi = (1 + \mu\alpha')\theta + \mu i\beta' \sin. \eta + \frac{1}{2}\mu i\gamma' \sin. 2\eta + \frac{1}{3}\mu i\delta' \sin. 3\eta + \text{etc.}$
vbi pars prima $(1 + \mu\alpha')\theta$ exhibet longitudinem mediam Terrae, quam quia supponimus esse exacte $= \theta$, sequitur esse debere $\alpha' = 0$. Reliquae autem partes continent inaequalitates motus periodici, quae ergo pendent a finibus angulorum η , 2η , 3η , 4η , etc. Hoc modo sequens tabula perturbationem est facta.

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

100 309

Tabula Perturbationum
in distantia et motu Terrae,
ab
actione Veneris,
in eam agente, ortarum.

Argumentum
Elongatio Veneris a Terra.

Signa	O.		I.		II.		III.		IV.		V.		Signa
	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	
0	0, 0	20	4, 0	5	0, 3	14	6, 9	16	11, 1	1	8, 4	18	30
1	0, 2	20	4, 0	4	0, 1	14	7, 1	16	11, 1	+	8, 1	19	29
2	0, 4	20	4, 0	3	+	14	7, 3	15	11, 2	0	7, 9	19	28
3	0, 6	20	3, 9	3	0, 3	15	7, 6	15	11, 2	1	7, 7	20	27
4	0, 8	20	3, 9	2	0, 5	15	7, 8	15	11, 2	2	7, 5	20	26
5	1, 0	20	3, 9	1	0, 8	15	8, 0	14	11, 2	2	7, 2	21	25
6	1, 2	20	3, 8	0	1, 0	16	8, 2	14	11, 1	3	7, 0	21	24
7	1, 4	19	3, 8	—	1, 3	16	8, 4	14	11, 1	4	6, 7	22	23
8	1, 6	19	3, 7	1	1, 5	16	8, 6	13	11, 1	4	6, 4	22	22
9	1, 8	19	3, 6	1	1, 7	16	8, 8	13	11, 0	5	6, 2	23	21
10	2, 0	18	3, 5	2	2, 0	17	9, 0	12	10, 9	6	5, 9	23	20
11	2, 2	18	3, 4	3	2, 2	17	9, 1	12	10, 9	6	5, 7	23	19
12	2, 4	17	3, 3	4	2, 5	17	9, 3	11	10, 8	7	5, 4	24	18
13	2, 5	17	3, 2	4	2, 7	17	9, 4	11	10, 7	8	5, 1	24	17
14	2, 7	16	3, 1	5	3, 0	17	9, 6	10	10, 7	8	4, 9	24	16
15	2, 8	16	3, 0	6	3, 2	17	9, 8	10	10, 5	9	4, 6	25	15
16	3, 0	15	2, 9	6	3, 5	17	9, 9	9	10, 4	10	4, 3	25	14
17	3, 1	15	2, 7	7	3, 7	17	10, 0	9	10, 3	10	4, 0	25	13
18	3, 2	14	2, 6	8	4, 0	17	10, 1	8	10, 2	11	3, 7	25	12
19	3, 3	13	2, 4	8	4, 2	17	10, 3	8	10, 1	12	3, 4	26	11
20	3, 5	13	2, 3	9	4, 5	17	10, 4	7	9, 9	12	3, 1	26	10
21	3, 6	12	2, 1	9	4, 7	17	10, 5	7	9, 8	13	2, 8	26	9
22	3, 6	11	1, 9	10	5, 0	27	10, 6	6	9, 6	14	2, 5	26	8
23	3, 7	11	1, 7	10	5, 2	17	10, 7	5	9, 5	14	2, 2	26	7
24	3, 8	10	1, 6	11	5, 5	17	10, 8	5	9, 3	15	1, 9	27	6
25	3, 8	9	1, 4	11	5, 7	17	10, 9	4	9, 1	15	1, 6	27	5
26	3, 9	8	1, 2	12	6, 0	17	10, 9	3	8, 9	16	1, 2	27	4
27	3, 9	8	1, 0	12	6, 2	17	11, 0	3	8, 7	17	0, 9	27	3
28	3, 9	7	0, 8	13	6, 5	16	11, 0	2	8, 6	17	0, 6	27	2
29	4, 0	6	0, 6	13	6, 7	16	11, 1	2	8, 5	18	0, 3	27	1
30	4, 0	5	0, 3	14	6, 9	16	11, 1	1	8, 4	18	0, 0	27	0
Grad.	+	—	+	+	—	+	—	+	—	—	—	Grad.	
Signa	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Long.	Dist.	Signa
	XI.		X.		IX.		VIII.		VII.		VI.		

VLTERIORES DISQUISITIONES
DE
TEMPORE PERIODICO COMETAЕ,
ANNO 1770 OBSERVATI.

Auctore
A. I. LEXELL.

§. I.

Quamuis argumenta, quibus pro stabiliendo tempore Periodico Cometae Anno 1770 observati, in priori hac de re disquisitione, usus sum, adeo stringentia mihi esse videantur, ut conclusioni a me inuentae verisimilitudinem saltem insignem, conciliare debeant; tamen aegre ferre non potui, quod haec conclusio, vtpote omnino inexpectata et valde singularis, apud Astronomos fidem vix ac ne vix quidem, inuenire potuerit. Quemadmodum enim pro re valde singulari iam haberi mereatur, quod ex observationibus alicuius Cometae in vicinia eius ad Perihelium factis, tempus eius Periodicum determinari potuerit, ita vix quidem primo intuitu credibile videri debuit, quod Cometa hic Anno 1770 observatus, Periodum suam circa Solem, annis quinque cum dimidio, absolueret; praepremis quum nullum esset indicium hunc Cometam vnquam antea terriculis fuisse visum. Vt igitur hoc in negotio, non so-

R r 3

lum

lum mihi met ipsi satisfacerem, sed etiam eos Astronomorum convincere possem, quibus mea determinatio adhuc videbatur dubia, nouo examine eandem stabilire et confirmare constitui. Cum igitur in prioribus ostendissem, Elementa a me inuenta, quae tempori Periodico quinque annorum cum dimidio erant accommodata, obseruationibus Cometae saltem secunda eius apparitione factis, egregie satisfacere, nunc ad plenam conuictionem adhuc desiderabatur, vt ostendi posset, aucto aliquantum tempore Periodico Cometae, eiusmodi Elementa pro eius orbita inueniri, quae non aequè bene obseruationibus satisfaciendis inferuissent, quoque maius augmentum tempori Periodico tribuatur, eo insigniores obseruationibus induci errores. Qua autem ratione hoc argumentum instruximus, id cum alia occasione iam a nobis succincte sit expositum, prolixius quidem hic tradere constituimus; idque eo potius quod in hac disquisitione varia inuenimus, quae opinionibus in priori de hoc argumento Dissertatione traditis, emendandis & corrigendis inferuire debeant. In exponenda autem serie nostrorum argumentorum, eundem sequemur ordinem, quem in nostris meditationibus secuti sumus, vt pateat quam exacte et scrupulose nostram demonstrationem adornare, conati sumus.

§. 2. Elementa pro orbita Cometae, in priori nostra Dissertatione allata, licet obseruationibus Cometae secunda eius apparitione factis, tam bene satisfaciant, vt maior consensus desiderari nequeat, tamen ab illis, quae prima apparitione mense nimirum Iunii Anno 1770, institutae sunt, aliquanto magis abluunt; vnde iure concludi posse mihi videbatur, propter actionem telluris in nostrum

strum Cometam, binas portiones orbitae ante et post eius ad tellurem nostram approximationem, descriptas, non prorsus convenire, seu ad eandem Sectionem Conicam non pertinere. In illa autem opinione eo magis confirmatus fui, quod tum quidem nullum mihi pateret medium, quo consensus harum observationum obtineri posset, licet uti infra videbimus, postmodum eiusmodi Elementa inuenerim, quae tantum non omnibus huius Cometae observationibus satisfaciunt. Quum igitur persuasus essem, non admodum scrupulose in eo esse elaborandum, ut observationes prima et secunda Cometae apparitione factae, inter se redderentur consentientes, primum quidem examinandum tantummodo esse existimaui, quam Latitudinem Elementa, solis observationibus secundae apparitionis satisfacientia, admitterent. Hunc in finem, quia uti ex priori Dissertatione constat, definita Longitudine Cometae, per ipsas observationes loci Geocentrici, inclinatio orbitae saltem intra limitem unius minuti primi, cognoscatur; examen nostrum ita instruximus, ut assumtis pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae certis hypothesebus, pro binis observationibus secundae apparitionis, quaereremus loca Cometae Helio-centrica, tum vero assumpto certo valore excentricitatis, pro orbita Cometae, reliqua huius orbitae Elementa investigaremus, cuius methodi adumbrationem, nuper peculiari Schediasmate huic volumini Actorum inferendo adornauimus. Iam si tempus Perihelii per utramque observationem definitum, non congrueret, valorem excentricitatis immutauimus ita, ut tandem ex utraque observatione tempus pro Perihelio Cometae prorsus redderetur congruum. Elementis autem sic inuentis in usum adhibitis, computauimus loca Cometae Geocentrica pro temporibus aliarum obser-

observationum, quo ipso innotuit, *utrum* observationes cum calculo consentirent, nec ne.

§. 3. Posita igitur Longitudine Nodi Ascendentis $= 4^s. 12^o. 40'$. et inclinatione orbitae $= 1^o. 35'. 30''$, quae-
rendam instituimus orbitam, quae binis sequentibus obser-
vationibus exacte satisfaceret:

	Longit. Com. observ.	Latit. Com.
Aug. 10. $14^h. 30'. 23''$	$3^s. 9^o. 32'. 42''$	$1^o. 9'. 18''$ A
Octob. 2. $16. 38. 50$	$4. 10. 41. 52$	$1. 10. 10$ A

Methodo igitur in prioribus descripta ad haec deuenimus
Elementa: Elongatio Perihelii a Nodo descendente $= 43^o.$
 $14'. 26''$. Tempus Perihelii 1770 13, 1606 Aug., Excen-
tricitas orbitae $= 0,7822473$, Semiparameter orbitae
 $= 1,1988111$, ex quo colligitur tempus Periodicum Co-
metae $= 5,4291$ Anni. His autem Elementis adhibitis,
sequentia per computum eliciuntur loca Cometae Geo-
centrica:

	Longit.Com.observ.	Latit. Comet.
Aug. 2. $15^h. 3'. 15''$	$3^s. 6^o. 4'. 19''$	$49'. 11''$ A
29. $15. 21. 53$	$3. 21. 1. 12$	$1^o. 21. 1.$ A

quarum determinationum dissensus ab observationibus, non
omnino maior est, quam ut facile admitti queat.

§. 4. Nunc vero si ponatur Longitudo Nodi
Ascendentis $= 4^s. 12^o. 20'$ et inclinatio orbitae $1^o. 34'. 30''$,
pro sequentibus observationibus:

	Longit. Com. observ.	Latit. Comet.
Aug. 7. $14^h. 49'. 19''$	$3^s. 8^o. 6'. 40''$	$1^o. 3'. 35''$ A
Octob. 1. $15. 23. 22$	$4. 10. 12. 6$	$1. 9. 51$

Ele-

Elementa isthaec inuenientur: Elongatio Perihelii a Nodo descendente $= 44^{\circ}. 8'. 40''$; Tempus Perihelii 1770, Aug. 13, 7155; Excentricitas orbitae $= 0, 7908100$; Semiparameter orbitae $= 1, 2085528$; hinc Tempus Periodicum Cometae $= 5, 7944$ Anni. Pro supra allatis autem observationibus dier. 2 et 29 Aug. Longitudines Cometae Geocentricae ex calculo erunt: $3^{\circ}. 6'. 21. 50''$ et $3^{\circ}. 21'. 01. 51''$, quae cum obseruatis pulchre admodum consentiunt. Tum vero si, eadem pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae facta hypothefi, itemque in vsum vocata obseruatione die 7. Aug. instituta, loco obseruationis pro 1 Octob. supra allatae, ista adhibeatur, qua pro 1 Octob. $16^b. 33'. 28''$, inuenta est Longitudo Cometae $4^{\circ}. 10'. 13'. 54''$ et Latitudo $1^{\circ}. 10'. 4''$ A, Elementa orbitae hunc in modum determinabuntur: Elongatio Perihelii a Nodo ascendente $= 43^{\circ}. 54'. 18''$; Tempus Perihelii 1770 Aug. 13, 6320; Excentricitas orbitae $= 0, 7817800$; Semiparameter orbitae $= 1, 2031183$, indeque Tempus Periodicum Cometae $= 5\ 4430$. Ex quibus Elementis, pro modo citatis temporibus obseruationum, diebus 2 et 29 Augusti factarum, sequentes eliciuntur Longitudines Cometae: $3^{\circ}. 6'. 41. 20''$. et $3^{\circ}. 20'. 58'. 44''$; quae quidem prius allatis aliquanto magis erroneae sunt, interim nec in his errores iusto grauiores habendae sunt. In Latitudines Cometae ex Elementis deducendas, necesse non erat, vt inquireremus, quia illas ab insignioribus aberrationibus immunes esse, facile praesumi potuit.

§. 5. His igitur speciminibus iam equidem satis perspicuum redditur, Elementa quae obseruationibus Cometae, secunda eius apparitione factis, satisfaciant, aliquali
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I. S s cum

cum Latitudine accipi posse, eaque aliquantum diuersa prodire, prouti hypothesis pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae, alia et alia statuatur, vel diuersae in vsum vocentur obseruationes. Hinc autem suspicio mihi oborta est, an non fieri posset, vt Elementorum in priori Disquisitione inuentorum aliquanta immutatione, id praestari posset, vt obseruationes, prima Cometae apparitione factae, ad consensum redigerentur cum illis, quae secunda apparitione institutae habentur. Aliquot itaque hunc in finem institutis tentaminibus, ad eiusmodi deueni Elementa, quae obseruationibus huius Cometae tantum non omnibus, ita satisfacerent, vt maximi errores vix duo minuta prima excederent. Antequam vero horum Elementorum expositionem tradam, haud praeter rem erit, vt primum succinctam adumbrationem Methodi, in hac disquisitione adhibitaе, exponam.

§. 6. Quum igitur principalis difficultas hoc in negotio inde oriatur, quod binae quaequam obseruationes primae apparitionis, vtpote illae quae 15^{to} & 29 Iunii institutae sunt, reduci debeant tam ad consensum inter se, quam cum illis, quae ab initio Augusti, vsque ad initium Octobris factae habentur; primum quidem de eo imprimis solliciti fuimus, vt obseruationes diebus 15 & 29 Iunii inter se redderentur conspirantes. Ne autem consideratio Latitudinis hanc disquisitionem turbaret, illius primo quidem nullum habuimus respectum, vsque dum Elementa ita adornare licuerit, vt Longitudinibus Cometae satisfacerent. Scilicet pro tempore Periodico Cometae certum adhibentes valorem, quantitatem semiparametri quoque hypothesi effinximus, vnde his binis quantitibus datis ipsa species orbi-

orbitae determinata habebatur. Deinde quum pro observatione, die 29 Iunii instituta, determinatio Longitudinis Geocentricae praepremis dependeat ab elongatione Cometae a terra e Sole visa, in qua quidem si vno minuto secundo fuerit aberratum, inde in Elongationem Cometae a Sole e terra spectatam deriuabitur error $45''$, priorem harum elongationem tamquam cognitam spectare licebit. Hinc si tempus Perihelii etiam pro cognito habeatur, ope observationis die 29 Iunii institutae, Elongatio Perihelii a nodo innotescet. Nam si detur tempus Perihelii, dabitur pro observatione die 29 Iunii angulus anomaliae, quem exprimamus littera θ , elongatione Perihelii a Nodo per ω indicata; dabit igitur $\theta - \omega$ elongationem Cometae a Nodo, quam ob inclinationem orbitae proxime cognitam, parvula quantitate δ ad elongationem in Ecliptica reducere licet, quae erit $\theta - \omega - \delta$. Porro ob datas longitudes Nodi et terrae, dabitur elongatio Nodi a terra e Sole visa $= \eta$; hincque elongatio terrae a Cometa Heliocentrica $= \theta - \omega - \delta - \eta = \gamma$; ideoque si hic angulus γ supponatur cognitus, vicissim habebitur $\omega = \theta - \delta - \eta - \gamma$.

§. 7. Exemplo autem res fiet illustrior. Ponamus esse tempus Periodicum Cometae $= 5,585$ Annorum, et semiparametrum orbitae $= 1,2042869$, Tempusque Perihelii incidere in 13,5400 Augusti, pro 29 Iunii $11^h.59^l.26''$ erit angulus anomaliae $= \theta = 78^\circ.9^l.3''$; tum vero, ob Longitudinem Nodi ascendent $= 4^\circ.12^\circ.20^l.0''$ et Solis $= 3^\circ.8^\circ.6^l.25''$, est angulus $\eta = 34^\circ.13^l.35''$, porro est angulus parvulus $\delta = 35''$ et $\gamma = -1^l.53''$, ex quo obtinebitur $\omega = 43^\circ.56^l.46''$. Deinde pro 15 Iunii $11^h.53^l.22''$, habetur angulus anomaliae $\theta = 90^\circ.15^l.41''$, vnde fit

$\theta - \omega = 46^{\circ}.18'55''$ et $\theta - \omega - \delta = 46^{\circ}.18'17''$, atque est pro hoc tempore $\eta = 46^{\circ}.36'.16''$, hinc fit $\gamma = -1^{\circ}.17'.59''$; vnde calculo instituto reperietur angulus elongationis inter Solem et Cometam e Sole visus $8^{\circ}.7'.53''$, ideoque Longitudo Cometae $9^{\circ}.2^{\circ}.51'.37''$.

§. 8. Nec hoc negotium eo ipso turberi censendum est, quod Longitudo Nodi nondum exacte sit definita, scilicet elongatio Perihelii a Nodo certae hypothesei Longitudinis Nodi accommodata est, quantumque posterius horum Elementorum immutatur, tantam etiam mutationem in priori statuendam esse, oportet. Exactum autem iudicium de vera quantitate Longitudinis Nodi et inclinationis orbitae ex Latitudinibus Cometae diebus 15 et 29 Iunii obseruatis, formandum est, scilicet haec Elementa ita assumenda sunt, vt, quantum fieri liceat, istis Latitudinibus satisfiat.

§. 9. Elementa igitur hoc modo definita, quibus, pro orbita Cometae determinanda, adquiescendum esse existimaui, ad sequentia reducuntur capita:

- I. Longitudo Nodi Ascendentis $= 4^{\circ}.12^{\circ}.0'$.
- II. Inclination orbitae ad Eclipticam $= 1^{\circ}.33'.40''$.
- III. Elongatio Nodi descendentis a Perihelio $= 44^{\circ}.17'.3''$, hincque Longitudo Perihelii $11^{\circ}.26^{\circ}.16'.25''$.
- IV. Tempus transitus Cometae per Perihelium, Anno 1770 die 13, 5450 Augusti, siue $13^h.5'$ circiter.
- V. Distantia Cometae in Perihelio suo a Sole $= 0,6743815$, dum nimirum distantia media Solis a terra unitate exprimitur.

VI. Semiaxis principalis orbitae a Cometa descriptae = 3, 1478606 distantiarum huiusmodi mediarum, vnde colligitur tempus Periodicum Cometae = 5,585 Annorum, seu 5 Annor. 7 Mensium circiter. Reliqua Elementa orbitae, prouti semiparameter et excentricitas, ex his facile quidem colliguntur, interim tamen si cuipiam volupe fuerit, calculos nostros examini subiicere, horum Elementorum valores cum adiectis eorum Logarithmis heic adponere non superfluum erit:

Semiparamet. orbitae = 1, 2042869, Log. = 0, 0807300.

Excentric. orbitae = 0, 7857652, Log. = 9, 8952927.

Distantia Perih. = 0, 6743815, Log. = 9, 8289057.

Semiaxis orbitae = 3, 1478606, Log. = 0, 4980155.

Distantia Aphel. = 5, 6213397, Log. = 0, 7498399.

§. 10. His igitur Elementis stabilitis loca Cometae Geocentrica per calculum elicitata se habebunt, vti sequens Tabula declarat, quae eorum comparisonem cum observationibus simul ob oculos ponit:

Tempus medium Parisinum.	Long. Comet ex calculo.	Differ. ab observ.	Latit. Comet. ex calculo.	Differ. ab observ.
Junii 14. 11 ^b . 29 ^l . 48 ^{''}	9 ^s . 20. 48 ^l . 1 ^{''}	— 17 ^{''}	6°. 40 ^l . 54 ^{''} B	— 30 ^{''}
15. 11. 23. 22	- 2. 51. 54	— 5	6. 57. 51	— 36
17. 11. 11. 33	- 3. 0. 52	— 54	7. 38 37	+ 14
20. 10. 40. 48	- 3. 17. 2	— 50	9. 5. 29	+ 9
21. 10. 27. 45	- 3. 24. 26	— 1 ^l . 9	9. 45. 27	— 51
22. 12 9. 36	- 3. 34. 9	— 26	10. 39. 54	— 49
24. 12. 3. 18	- 3. 59. 51	+ 7	12. 59. 52	+ 3
25. 13. 27. 55	- 4. 21. 21	+ 21	14. 54. 37	— 41

Tempus medium Parisiinum.	Longit. Comet. ex calculo.	Differ. ab observ.	Latit. Comet. ex calculo.	Differ. ab observ.
Iunii 27.13 ^b .13 ⁱ .17 ^u	9 ^s . 5°.36 ⁱ . 6 ^u	- 1 ⁱ .12 ^u	21°. 8 ⁱ .38 ^u B	+ 9 ^u
28.10. 46.34	- 6.43.58	+ 2. 0	26.30.39	- 1 ⁱ . 6
29.10. 2.51	- 9.22. 1	+ 1.25	36.48. 4	- 4.16
- 10.32.33	- 9.27.31	+ 44	37. 6.30	- 4.55
- 11.59.26	- 9.42.30	+ 15	38. 0.37	- 3. 5
30.12. 3.11	* - 21. 1.45	- 37.17	61.22.26	- 1°.18 ⁱ . 3 ^u
Iulii 1.12. 3.23	* 1.29.59.15	- 4°.17 ⁱ .37 ^u	70.48.44	+ 20.54
3.11. 3.45	* 2.27.40.38	+ 1.35.44	25.18.50	+ 14.31
Aug. 2.15. 3.15	3. 6. 2. 4	+ 28	49.59 A	+ 8
15.39.12	- 6. 2.37	+ 21	50. 4	+ 17
3.14.45. 9	- 6.24.32	+ 43	52.46	+ 50
15.19.43	- 6.25. 9	+ 32	52.51	+ 5
15.24. 9	- 6.25.13	+ 37	52.52	+ 14
4.14.12.48	- 6.47.46	- 18	56. 4	- 20
14.21.52	- 6.47.53	+ 50	56. 5	+ 22
14.38.22	- 6.48.11	+ 49	56. 7	+ 29
14.54.12	- 6.48.26	+ 48	56. 9	+ 37
15. 7.25	- 6.48.39	+ 57	56.11	- 25
15.33. 8	- 6.49. 5	+ 1. 3	56.14	- 15
5.14.38.43	- 7.13. 3	+ 48	58.50	+ 27
14.55. 3	- 7.13.22	+ 1. 6	58.52	+ 34
15.13.28	- 7.13.45	+ 36	58.54	+ 37
15.28.24	- 7.14. 3	+ 40	58.55	+ 24
6.14.29.42	- 7.38.45	+ 40	1. 1.16	+ 2
14.45.26	- 7.39. 1	+ 47	1. 1.17	- 5
15. 0. 5	- 7.39.18	+ 50	1. 1.19	+ 22
7.14.49.19	- 8. 5.59	+ 41	1. 3.34	+ 1
14.56. 9	- 8. 6. 6	+ 44	1. 3.35	+ 13

Tem-

Tempus medium Parifinum.		Longit. Com. ex calculo.	Differ. ab obferv.	Latit. Comet. ex calculo.	Diff. ab obferv.
Aug.	8.14 ^b .20 ⁱ .13 ^u	3 ^s . 8°.33 ⁱ .17 ^u	+12 ^u	1°. 5 ⁱ .35 ^u A	+1 ⁱ . 1 ^u
	14. 20. 29	- 8. 33. 17	+57	1. 5. 35	+1. 3
	14. 51. 12	- 8. 33. 52	+21	1. 5. 36	+1. 4
	15. 10. 28	- 8. 34. 14	+35	1. 5. 37	+1. 6
	9.14. 48. 10	- 9. 2. 40	NB.+1 ⁱ .50	1. 7. 29	+2. 4
10.	14. 14. 27	- 9. 31. 44	+52	1. 9. 9	+4
	14. 21. 43	- 9. 31. 53	+49	1. 9. 9	+4
	14. 30. 23	- 9. 32. 4	+38	1. 9. 10	+8
	14. 39. 32	- 9. 32. 16	+41	1. 9. 11	+13
	14. 46. 16	- 9. 32. 25	- 8	1. 9. 12	+52
	15. 0. 49	- 9. 32. 43	+26	1. 9. 13	+33
	15. 19. 55	- 9. 33. 7	+45	1. 9. 14	+13
11.	14. 23. 23	-10. 2. 37	+25	1. 10. 40	+11
	14. 31. 49	-10. 2. 47	+31	1. 10. 40	+15
	14. 45. 6	-10. 3. 5	+49	1. 10. 41	+1.32
	14. 54. 20	-10. 3. 17	+52	1. 10. 41	+1.31
12.	14. 46. 25	-10. 34. 43	+ 5	1. 12. 4	+48
	15. 9. 4	-10. 35. 13	+39	1. 12. 5	+1. 8
	15. 27. 46	-10. 35. 36	+20	1. 12. 7	+14
	15. 30. 25	-10. 35. 40	+ 6	1. 12. 7	+1.25
14.	14. 37. 29	-11. 40. 4	+21	1. 14. 25	+1. 0
	14. 58. 39	-11. 40. 33	+22	1. 14. 26	+1. 3
	15. 18. 39	-11. 41. 1	-21	1. 14. 27	+1. 5
	15. 28. 39	-11. 41. 15	-20	1. 14. 28	+1.10
15.	15. 43. 33	-12. 15. 37	-41	1. 15. 26	+1.17
	15. 56. 37	-12. 15. 55	-29	1. 15. 26	+1.19
	16. 4. 32	-12. 16. 6	-10	1. 15. 27	+1.19
18.	14. 24. 32	-13. 59. 37	-13	1. 17. 39	+56

Tem.

Tempus medium Parisinum.	Longit. Com. ex calculo.	Diff. ab observ.	Latit. Com. ex calculo.	Diff. ab observ.
Aug. 18. 14 ^b . 43 ⁱ . 23 ^u	3 ^s . 14 ^o . 0 ⁱ . 5 ^u	— 0 ^u	1 ^o . 17 ⁱ . 39 ^u A	+ 1 ⁱ . 2 ^u
15. 4. 7	- 14. 0. 37	+ 20	1. 17. 40	+ 1. 15
19. 14. 33. 18	- 14. 36. 16	— 13	1. 18. 37	+ 41
14. 57. 41	- 14. 36. 52	— 11	1. 18. 38	+ 50
26. 15. 39. 38	- 19. 3. 59	— 15	1. 20. 5	+ 40
16. 16. 4	- 19. 4. 56	— 52	1. 20. 5	+ 51
28. 14. 44. 8	- 20. 20. 27	— 45	1. 20. 5	+ 50
15. 8. 38	- 20. 21. 5	— 25	1. 20. 5	+ 59
29. 15. 21. 53	- 21. 0. 31	— 28	1. 20. 3	+ 2
15. 43. 31	- 21. 1. 6	— 28	1. 20. 3	+ 38
16. 3. 59	- 21. 1. 37	— 9	1. 20. 3	+ 37
16. 25. 17	- 21. 2. 8	— 0	1. 20. 3	+ 36
30. 14. 48. 22	- 21. 38. 44	+ 28	1. 19. 58	+ 58
15. 6. 15	- 21. 39. 14	+ 51	1. 19. 58	+ 1. 0
15. 26. 31	- 21. 39. 46	+ 41	1. 19. 58	+ 1. 2
31. 14. 38. 25	- 22. 17. 49	— 33	1. 19. 50	+ 33
15. 19. 4	- 22. 18. 54	— 38	1. 19. 50	+ 35
Sept. 4. 15. 5. 20	- 24. 53. 46	— 1 ⁱ . 5	1. 19. 2	+ 21
15. 15. 42	- 24. 53. 56	— 45	1. 19. 2	+ 23
15. 32. 42	- 24. 54. 28	— 47	1. 19. 2	+ 29
15. 48. 29	- 24. 54. 54	— 58	1. 19. 2	+ 32
16. 11. 28	- 24. 5. 32	— 19	1. 19. 1	+ 50
5. 14. 48. 37	- 25. 31. 44	— 37	1. 18. 47	+ 58
15. 2. 43	- 25. 32. 6	— 59	1. 18. 47	+ 56
15. 14. 55	- 25. 32. 26	— 1. 1	1. 18. 47	+ 57
8. 15. 57. 4	- 27. 27. 41	— 1. 9	1. 17. 51	+ 32
16. 5. 45	- 27. 27. 54	— 1. 7	1. 17. 51	+ 33
9. 15. 6. 30	- 28. 3. 52	— 33	1. 17. 33	+ 49

Tem-

Tempus medium Parisiinum.	Longit. Comet ex calculo.	Differ. ab observ.	Lat. Comet. ex calculo.	Different. ab obseru.
Sept. 9. 15 ^b . 22 ⁱ . 5 ^u	3 ^s . 28°. 4 ⁱ . 18 ^u	— — 44 ^u	1°. 17 ⁱ . 33 ^u	+ 50 ^u
15. 37. 23	- 18. 4. 41	— 1. 7	1. 17. 33	+ 51
10. 16. 26. 23	- 28. 43. 15	NB. - 2. 49	1. 17. 12 A	+ 1. 52 NB.
14. 14. 16. 26	4. 1. 5. 36	— 1. 0	1. 15. 46	+ 32
14. 14. 33. 47	- 1. 6. 1	— 44	1. 15. 45	+ 36
15. 0. 21	- 1. 6. 43	— 37	1. 15. 45	+ 38
15. 42. 21	- 1. 7. 50	— 43	1. 15. 44	+ 41
17. 15. 53. 3	- 2. 53. 13	— 33	1. 14. 35	+ 17
16. 5. 15	- 2. 53. 31	— 36	1. 14. 35	+ 17
16. 13. 53	- 2. 53. 43	— 33	1. 14. 34	+ 19
18. 15. 30. 16	- 3. 27. 6	— 9	1. 14. 12	+ 46
15. 56. 6	- 3. 27. 45	— 18	1. 14. 12	+ 48
16. 9. 58	- 3. 28. 4	— 24	1. 14. 11	+ 51
19. 15. 19. 4	- 4. 0. 37	— 5	1. 13. 48	— 46
15. 29. 50	- 4. 0. 52	— 5	1. 13. 46	— 46
20. 15. 33. 45	- 4. 34. 27	— 10	1. 13. 35	— 1. 0
29. 15. 23. 51	- 9. 15. 53	— 59	1. 9. 42	+ 34
15. 37. 50	- 9. 16. 10	— 1. 6	1. 9. 42	+ 1. 53
16. 39. 30	- 9. 17. 24	— 1. 30	1. 9. 41	+ 1. 12
Oct. 1. 15. 23. 22	- 10. 13. 31	— 1. 25	1. 8. 54	+ 57
16. 33. 28	- 10. 14. 55	— 1. 1	1. 8. 53	+ 1. 11
2. 15. 43. 37	- 10. 41. 59	— 1. 9	1. 8. 29	+ 35
16. 38. 50	- 10. 43. 5	— 1. 13	1. 8. 29	+ 41

§. II. Ex inspectione huius Tabulae iam oppido
liquet, Elementa a nobis inuenta adeo exacte cum ob-
seruationibus consentire, vt vix vllibi dissensus maiores,
quam duorum minutorum primorum, reperiantur, excep-
tis tamen obseruationibus, quae diebus 30 Iunii, 1 et 3
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I. T t Iulii

Iulii institutae sunt, pro quibus errores omnino enormes emergunt. De his autem obseruationibus tenendum, quod, ipso *Cel. Messier* fatente, pro exactis reputari non queant; nam quae his diebus Cometae assignavit loca, illa per aestimationem solum determinata sunt, in quam omnino insignes errores irrepere potuerunt. Et quod speciatim die 1 Iulii institutam attinet, pro qua error in Longitudine integros quatuor gradus exsuperat; calculo inueni, quod si in declinatione Cometae aestimanda vnico Gradu a *Cel. Messier* fuerit aberratum, Longitudinem Cometae inde plus quam tribus Gradibus factam esse erroneam. Quod si vero quis existimauerit, insignes errores, qui diebus modo commemoratis obseruationibus insunt, indicio esse, quod motus Cometae isto tempore ab actione telluris affectus fuerit, nec nos plane habebit refragantes; hoc enim in negotio vix quicquam certi statuere licet, nisi experimento facto ipsa quantitas actionis, quam terra in Cometam exseruit, fuerit inuestigata.

§. 12. Deinde licet errores, pro obseruationibus secunda apparitione factis, numeris satis exiguis concludantur, tamen vtique singulare videbitur, quod pro Latitudinibus, tantum non omnes hi dissensus in eundem sensum cadant, id est singuli fere sint positui. Quatenus autem id praecipue intendimus, vt Latitudinibus diebus 15 et 29 Iunii obseruatis satisfaceremus, id vix aliter praestare nobis licuit, quam huiusmodi valore pro inclinatione orbitae adhibito, quo obseruationibus secundae apparitionis, respectu Latitudinis, errores non quidem praegrandes, verumtamen in eundem sensum cadentes inducerentur. Fieri quidem potest, vt leui quadam correctione

ne nostris Elementis adplicata, errores obseruationum secundae apparitionis respectu Latitudinis tantillum mutantur, cuius etiam specimen infra dabimus, verum vt incommodo, supra commemorato, penitus obuiam iri queat, nullum adhuc nobis innotuit remedium. Caeterum facile liquet, obseruationes, quas signo NB. distinximus, pro aliquantum erroneis esse habendas, id quod quoque exinde probabile redditur, quod Cel. *Messier* non licuerit harum obseruationum verificationem per alias, iisdem diebus factas, instituere.

§. 13. Elementa nostra licet obseruationibus egregie satisfaciant, tamen non dubitamus, quin leui earum mutatione, consensus calculi cum obseruationibus vel aequae aptus, vel maior obtineri queat, hoc enim in negotio aliquam Latitudinem pro definiendis Elementis Cometae esse admittendam, ipsa rei indoles declarat. Si itaque Elementa nostra pro ipsa specie orbitae, nimirum eius semiparameter et excentricitas, vti supra definita sunt, retineantur, tum vero supponatur Tempus Perihelii Cometae contigisse Aug. 13,5500, fiet pro obseruatione die 15 Iunii instituta Longitudo Cometae ex calculo $9^{\circ}. 2^{\circ}. 52'.$ $23''$ et pro 29 Iunii $11^{\circ}. 59'.$ $26''$ Longitudo erit $9^{\circ}. 9^{\circ}. 43'.$ $6''$: ita vt iam quidem obseruatio die 15 Iunii aliquanto magis sit erronea, quam secundum Elementa a nobis stabilita, qui tamen error facile admitti posset. Pro tempore autem 2 Aug. $15^{\circ}. 3'.$ $15''$ fiet nunc Longitudo Cometae $3^{\circ}. 6^{\circ}. 2'.$ $14''$, ex quo liquet posteriori hac expressione pro tempore Perihelii adhibita, pro obseruationibus secunda Cometae apparitione factis errores in Longitudinibus commissos aliquantulum imminui.

Pro Latitudinibus vero Cometae calculus sequentes prae-
bet conclusiones: Primum si inclinatio orbitae statuatur
 $1^{\circ}. 33'. 50''$, tumque Latitudini obseruatae die 29 Iunii,
habita tamen ratione effectus ex Parallaxi oriundi, satisfi-
at, erit Longitudo $\oslash = 4^{\circ}. 12'. 3''$ et pro obseruatione
15 Iunii Latitudo ex calculo $6^{\circ}. 58'. 50''$. B, pro 2 au-
tem Aug. $49'. 56''$ Austr. Deinde si inclinatio orbitae
ponatur $1^{\circ}. 33'. 40''$, satisfaciendo iterum Latitudini die
29 Iunii obseruatae, fiet pro 15 Iunii Latitudo ex calcu-
lo $6^{\circ}. 58'. 20''$ Bor. et pro 2 Aug. $49'. 51''$ Austr, Lon-
gitudine \oslash existente $= 4^{\circ}. 12'. 7''$. Hinc igitur patet ista
correctione temporis Periodici, Latitudinibus Cometae
maiores induci errores; quam ob rem nisi scrupulosiores
esse velimus circa errores obseruationum in Longitudini-
bus, Tempus Perihelii in nostris Elementis assignatum po-
tius retrahi quam promoueri debet.

§. 14. Sequitur nunc, vt exactius examinemus
an non, aucto aliquantillum tempore Periodico Cometae
nostri, eiusmodi Elementa inuenire liceat, quibus obser-
uationes, quantum fieri potest, exacte impleantur. Inci-
piamus vero primum ab augmentis huius temporis Perio-
dici exiguis, hincque supponamus esse tempus Periodicum
5, 6 Annorum. Tum vero calculo instituto reperire li-
cebit, quod si reliqua Cometa Elementa hunc in modum
determinentur:

$$\text{Semiparameter orbitae} = 1, 2044817$$

$$\text{Distantia Perihelii} = 0, 6743408$$

$$\text{Excentricitas} = 0, 7861608$$

Tem-

Tempus Perihelii Aug. 13,5420, Long. $\Omega = 4^{\circ}.12'.9''$
 Elongatio Perihelii a nodo descend. $= 44^{\circ}.7'.59''$ et
 inclinatio orbitae $1^{\circ}.33'.40''$; Longitudines et Latitudines
 Cometae pro quinque momentis obseruatis inuenientur ex
 calculo, vti sequens Tabella declarat:

	Temp. Med. Parisinum.	Longit. Cometae ex calculo.	Latit. Cometae ex calculo.
Iunii	15. 11 ^b . 23 ^t . 22 ^u	9 ^s . 2 ^o . 52 ^t . 12 ^u	6 ^o . 58 ^t . 37 ^u . B
	29. 11. 59. 6	9. 9. 42. 59	38. 0. 54. B
Aug.	2. 15. 3. 15	3. 6. 2. 7	49. 35. A
	29. 15. 21. 53	3. 21. 0. 33	1. 20. 1. A
Oct.	1. 16. 33. 28	4. 10. 14. 44	1. 9. 0. A

Harum autem determinationum comparatio cum Ta-
 bula nostra superius allata declarabit, an his Elemen-
 tis adhibitis obseruationum errores augeantur, an minuan-
 tur. Liquet igitur pro obseruationibus secunda apparitio-
 ne factis, errores obseruationum in Longitudine aliquan-
 tillum diminui; in Latitudine vero hi errores partim
 augentur, vti pro obseruationibus diebus 2 et 29 Augu-
 sti, partim minuentur, vti pro obseruatione die 1 Octob.
 instituta. At pro obseruatione die 15 Iunii facta error in
 Latitudine omnino multum excedit illum, qui secundum
 Elementa a nobis adoptata reperitur.

§. 15. Tribuamus nunc tempori Periodico Co-
 metae nostri augmentum aliquanto maius, ponendo ni-
 mirum quod integrorum sex sit annorum. Tum autem
 si reliqua Cometae Elementa sequentem in modum deter-
 minentur:

Semiparameter orbitae = 1, 2071811

Distantia Perihelii = 0, 6719267

Excentricitas = 0, 7965047

Longitudo $\oslash = 4^s. 12^o. 6'$, Elongatio Perihelii a $\oslash = 44^o. 9'. 56''$, inclinatio orbitae = $1^o. 34'. 30''$, pro quinque observationibus modo memoratis, calculus sequentia praebebit Cometae loca Geocentrica:

	Longit. Cometae.	Latit. Cometae.
15 Iunii -	9 ^s . 2 ^o . 51'. 52''	6 ^o . 58'. 6'' B
29 Iunii -	9. 9. 43. 6	38. 0. 27.
2 Aug. -	3. 6. 3. 18	- - 50. 15 A
29 - -	3. 21. 5. 42	1. 20. 0.
1 Oct. -	4. 10. 13. 18	1. 9. 10.

vbi quidem respectu Latitudinis observationibus secundae apparitionis melius fatisfit, quam per vlla Elementa hucusque commemorata. Longitudinum autem si habeatur ratio, observationes quidem 2 Aug. et 1 Octob. instituta egregie adimplentur, at pro 29 Aug. error observationis secundum haec Elementa excederet quinque minuta cum dimidio.

§. 16. Quia vero Elementa allata certo valori pro semiparametro assumpto accommodata sunt, nunc quoque videndum, an non semiparametrum hunc immutando, error Longitudinis pro 29 Aug. imminui queat. Retenta igitur eadem quantitate temporis Periodici, reliqua Cometae Elementa statuantur: Semiparameter orbitae

= 1, 2073967; Excentricitas = 0, 7964519; Longitudo $\oslash = 4^s. 12^o. 28'$; Elongatio Perihelii a $\oslash = 43^o. 47'. 28''$,
Incli-

Inclinatio orbitae = $1^{\circ} 34'. 0''$, hincque erunt loca Cometae, ex calculo:

	Longit. Cometae.				Latit. Com.			
d. 15 Iunii	-	9 ^s .	2°.	51 ^l .	25 ^{ll}	6°.	58 ^l .	6 ^{ll} B
29 - - -	-	9.	9.	42.	42	38.	0.	24
2 Aug.	-	3.	6.	2.	47	-	49.	3 A
29 - - -	-	3.	21.	4.	56	1.	19.	36.
1 Octob.	-	4.	10.	12.	23	1.	9.	1.

Sic itaque id quidem obtinetur, vt error in Longitudine pro obseruatione, die 29 Augusti instituta, aliquantum deprimatur, verum praeterquam quod errores in Latitudine, tam pro hac obseruatione, quam illa, quae 2 Aug. facta est, augeantur, obseruatio 1 Octob. iam respectu Longitudinis magis fit erronea, quam secundum Elementa prius commemorata. Quo autem magis valor pro semiparametro minuitur, eo maiores errores obseruationi 1 Octob. factae inducentur, ita vt hinc tuto colligere licet, si tempus Periodicum statuatur sex annorum, pro obseruationibus secundae apparitionis respectu Longitudinis summam maximorum errorum positiui et negatiui quinque saltem minutis primis aequari.

§. 17. Vltcrius autem procedendo nunc examinabimus, quibus erroribus obseruationes fiant obnoxiae, si tempus Periodicum statuatur septem annorum. Heic igitur si pro semiparametro adhibeatur valor = 1, 2125511, vt obseruationibus diebus 15 & 29 Iunii institutis satisfiat, reliqua Elementa sequenti ratione definientur: Excentricitas = 0, 8177036; Longitudo Ω = $4^{\circ} 12'. 49''$; Elongatio Perihelii a ϑ = $43^{\circ} 26'. 10''$; Inclinatio orbitae = 1° .

$= 1^{\circ}. 35'. 30''$. Hinc vero loca Cometae, pro quinque momentis supra commemoratis, fient:

	Longit. Comet.	Latit. Com.
d. 15 Iunii -	9 ^s . 2°. 52 ^l . 1 ^u	6°. 58 ^l . 16 ^u B
29 - -	9. 9. 42. 50	38. 0. 26.
2 Aug. -	3. 6. 6. 19	49. 3 A
29 - -	3. 21. 16. 18	1. 19. 31.
1 Octob.	4. 10. 10. 46	1. 9. 17.

Constat itaque ex hac Tabella, errores obseruationum secunda Cometae apparitione factarum respectu Longitudinis praegrandes esse, et imprimis quidem illam, quae obseruationi die 29 Aug. inest, adeo sedecim minuta prima excedere, cuiusmodi errem vix quispiam hac in obseruatione suspicari poterit.

§. 18. Quod si vero, valorem semiparametri aliquantum augendo, id intendamus, vt errorem in obseruatione d. 29 Aug. deprimamus, ex altera parte plurima alia incommoda experiemur; tum enim non solum error in obseruatione die 1 Octob. instituta, respectu longitudinis commissus, in maiori ratione augebitur, ac illa pro 29 Aug. minuitur; sed etiam singulis Latitudinibus Cometae, secunda eius apparitione obseruatis, insignes inducentur errores. Statuatur enim Semiparameter orbitae $= 1,2133888$; Excentricitas $= 0,8175636$; Longitudo $\odot = 4^{\circ}. 13^{\circ}. 58'$; Elongatio Perihelii a $\odot = 42^{\circ}. 14'. 41''$; Inclination orbitae $1^{\circ}. 33'. 50''$, eruntque loca Cometae subsidio horum Elementorum determinata

	Longit. Comet.	Latit. Comet.
15 Iunii -	9°. 2'. 51". 54"	6°. 58'. 30" B
29 - - -	9. 9. 42. 38	38. 0. 30.
2 Aug. -	3. 6. 5. 59	45. 25 A
29 - - -	3. 21. 13. 54	1. 17. 57.
1 Octob. -	4. 10. 7. 26	1. 9. 13.

§. 19. Ratiocinio igitur iam exposito euidenter comprobatur, si Tempus periodicum Cometae, ultra eum valorem, quem in nostris calculis adoptauimus, augeatur, obseruationibus errores continuo maiores induci, et siquidem illi errores, qui pro hypothese temporis Periodici sex annorum locum habent, verisimilitudine non prorsus destitui reputentur, saltem certum est, valore temporis Periodici vsque ad septem annos aucto, obseruationes maioribus obnoxias reddi erroribus, quam vt vlllo modo fidem inuenire queant. Verum quum huius ratiocinii vis praecipue in eo resideat, quod omnes omnino obseruationes circa hunc Cometam institutae ad consensum inter se redigendae sint, si cui verisimile videatur, actionem telluris in Cometam adeo fuisse insignem, vt motum Cometae sensibili perturbatione afficere potuerit; etiam adhuc examinandum restat, quam Latitudinem tribuere liceat Elementis, quae obseruationibus secunda tantum Cometae apparitione factis satisfacere debent. Quandoquidem autem angulus anomaliae, a Cometa circa Solem descriptus a 2 Augusti vsque ad initium Octobris, multo sit minor illo, quem in prioribus nostris calculis considerauius, facile intelligitur, dum quaestio est de Elementis, quibus obseruationes secundae apparitionis implentur, illa non adeo arctis limiti-

bus circumscribi, ac quae omnibus in vniuersum obseruationibus satisfacere debent.

§. 20. Praeterea quum Latitudines Cometae secunda eius apparitione obseruatae valde sint exiguae, nulum omnino est dubium, quin facili negotio illis satisfiat, modo obseruationibus, circa Longitudines institutis, fuerit satisfactum; hinc in sequenti disquisitione nihil necesse erat, vt Latitudinis haberemus respectum, quo ipso ingens compendium nostro examini accessit. Scilicet quia iam Longitudinem Nodi pro cognita habere liceat, si pro tempore Periodico Cometae et semiparametro orbitae certi valores hypothefi cflingantur, in eo tantum elaborandum est, vt inueniatur Tempus Perihelii Cometae et Elongatio Perihelii a Nodo, pro orbita, quae binis datis obseruationibus satisfaciat. Vt autem euidentius pateat, quaratione hoc examen instruximus, exemplo quodam eius ideam declarabimus. Supponamus igitur esse Longitudinem $\Omega = 4^{\circ}. 12^{\circ}. 0'$; Tempus Periodium Cometae $= 7$ Annis; Semiparametrum orbitae $= 1, 2302688$, et quae ramus orbitam, quae binis obseruationibus: die 2 Aug. $15^h. 3'. 15''$ et die 1 Octob. $15^h. 23'. 22''$ satisfaciat. Nunc vero oppido liquet, si pro alterutra harum obseruationum constaret angulus anomaliae a Perihelio descriptus, eo ipso non solum ipsum tempus Perihelii sed etiam elongationem Perihelii a Nodo determinari. Faciendo igitur pro illa obseruatione aliquot hypothefes anomaliae, et quaerendo Tempora Perihelii et elongationes Perihelii a Nodo istis hypothefibus conformes, deinde inuestigantur loca Cometae Geocentrica ex elementis inuentis, pro altera obseruatione, tumque dissensus harum determinationum

num cum obseruatione declarabit, quos valores pro Tempore Perihelii et elongatione Perihelii a Nodo assignare neceſſe erit.

§. 21. Sic ſi pro obseruatione 1 Octob. ſtatuantur hae hypotheſes anomaliae: $80^{\circ}. 40'$. et $81^{\circ}. 0'$, inde habebuntur pro Tempore Perihelii hi valores: Auguſt 14, 5976 et 14, 2359. Deinde, calculo inſtituto, quaerantur diſtanciae Cometae a Sole hiſ hypotheſibus accommodatae, et quum inclinatio orbitae ſaltem proxime ſit cognita, etiam diſtanciae curtatae dabuntur. Vnde ſi conſideretur triangulum, quod formatur a loco Cometae ad Eclipticam reducto, centro telluris et Solis; in iſto triangulo bina cognita ſunt latera, diſtancia nimirum Cometae curtata et diſtancia Solis a terra, una cum elongatione Solis a Cometa, quae per ipſam obseruationem datur. Innotefcet igitur hinc elongatio Cometae a terra e Sole viſa, quae pro priori quidem harum hypotheſium eſt $69^{\circ}. 23'. 31''$. Porro datur elongatio Nodi a terra, propter datas longitudines Nodi et terrae, haec elongatio pro caſu praefenti eſt $56^{\circ}. 56'. 30''$; erit igitur elongatio Cometae a Nodo $126^{\circ}. 19'. 1''$, qui angulus ad orbitam Cometae reductus erit $126^{\circ}. 18'. 25''$, vnde ſubtrahendo angulum Anomaliae ſuppoſitum $80^{\circ}. 40'. 0''$, fiet elongatio Perihelii a Nodo $= 45^{\circ}. 38'. 25''$; pro altera vero hypotheſi inuenitur haec elongatio $45^{\circ}. 37'. 28''$. Deinde pro binis hiſ hypotheſibus computetur locus Cometae ad momentum die 2 Aug. notatum, eruntque eiſ valores $3^{\circ}. 5^{\circ}. 47'. 16''$ et $3^{\circ}. 5^{\circ}. 16'. 38''$, ex quo per regulam falſi concluditur, Tempus Perihelii ſtatui debere Aug. 14, 7772 et elongationem Perihelii a Nodo $45^{\circ}. 39'. 0''$,

quod etiam satis bene cum obseruatione die 2 Aug. facta congruit: nam ex vltimis his Elementis habetur locus Cometæ die 2 Aug. et momento citato $3^{\circ}. 6^{\circ}. 2'. 56''$.

§. 22. Nunc igitur, ad principales conclusiones, ex nostris calculis eliciendas, propius accedentes, primum obseruabimus, supposito tempore Periodico sex annorum, obseruationibus secundæ apparitionis satis exacte satisfieri. Nam si statuatur semiparameter orbitæ = 1.2143963; Excentricitas = 0,7951200; Tempus Perihelii Aug. 14,1023; Elongatio Perihelii a ☿ = $44^{\circ}. 50'. 46''$. Longitudine ☿ supposita = $4^{\circ}. 12^{\circ}. 0'$, loca Cometæ ex calculo deducta erunt:

	Long. Cometæ	Differ. ab observ.
2 Aug. 15 ^b . 3'. 15''	$3^{\circ}. 6^{\circ}. 2'. 53''$	— 21''
12 - - 14. 46. 25	3. 10. 36. 52	— 2'. 4
29 - - 15. 21. 53	3. 21. 0. 12	— 9
1 Oct. 15. 23. 22	4. 10. 12. 15	— 9

vbi vix quidem maior consensus Theoriæ cum calculo desiderari potest. Caeterum obseruari quoque meretur, si his Elementis adhibitis, insuper statuatur inclinatio orbitæ $1^{\circ}. 34'. 30''$, Latitudinibus Cometæ obseruatis admodum egregie satisfactum iri.

§. 23. Sequitur autem, vt iam quoque inquiremus, an, supposito tempore Periodico Cometæ septem annorum, obseruationes secunda apparitione factæ impleri queant. Hoc vero examen ita instituemus, vt respectu imprimis habito quatuor momentorum obseruatorum, de quibus

quibus in superiori § egimus, dispiciamus, quales errores cuiuspiam harum observationum inesse oportet, dum tribus reliquis fuerit satisfactum. Iam igitur in id intenti, ut observationibus diebus 2 Aug. 29 Aug. et 1 Octob. satisfaciamus, sequentia adipiscimur Elementa: Semiparametrum orbitae = 1, 2373712; Excentricitatem = 0,8135456; Tempus Perihelii Aug. 15,6280; Elongationem Perihelii a ☿ = 46°. 14'. 6'', posita Longitudine ☿ = 4°. 12'. 0'', quibus in usum vocatis erunt:

Longit. Cometae.				Differ. ab observ.
2 Aug.	3°. 6'.	2'. 27''		+ 5''
12 -	3. 10.	41. 45		- 6'. 55.
29 -	3. 21.	0. 20		- 17
1 Octob.	4. 10.	12. 29		- 23

Facile autem colligi potest, hunc errorem in observatione, die 12 Augusti facta, commissum, minimum esse, qui prodit, dum observationibus 2 Aug. et 1 Octob. satisfaciendum est.

§. 24. Nam si pro Elementis orbitae sequentes binae effingantur hypotheses:

	I. Hyp.	II. Hyp.
Semiparameter orbitae	1, 2125511	1, 2473836
Tempus Perihelii Aug.	12, 8000	16, 8328
Elongatio Perihelii a ☿	44°. 20'. 2''	47°. 1'. 0''

Longitudine Nodi semper supposita = 4°. 12'. 0'', observationibus dieb. 2 Aug. et 1 Octob. quidem satisfiet; at pro momento die 12. Aug. observato ex his Elementis sequentes deducuntur Longitudines Cometae:

Longit. Cometae die 12. Aug. $\left| \begin{array}{l} \text{I. Hyp.} \\ 3^s. 10^o. 43'. 25'' \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{II. Hyp.} \\ 3^s. 10^o. 42'. 54'' \end{array}$

ex quo omnino patescit, determinationem in § praecedenti inuentam ab obseruatione fere tam parum recedere, ac fieri potest, quatenus obseruationibus diebus 2 Aug. et 1 Octob. omnimode satisfaciendum est; id quod aliis quoque calculis comprobari posset, nisi breuitati consulendum esset. Sufficiet autem quod hoc specimine iam sit comprobatum, supposito Tempore Periodico Cometae septem annorum, non fieri posse, vt Elementa inueniantur quae obseruationes, diebus 2 Aug. 12 Aug. et 1 Octob. institutas, simul ab omnibus plane erroribus immunes reddat.

§. 25. Deinde vero pro conciliandis inter se obseruationibus die 12 Aug. 29 Aug. et 1 Octob. institutis, frequentia pro orbita Cometae inuenientur Elementa: Semiparameter orbitae 1, 2345253; tempus transitus per Perihelium Aug. 15, 1340 et elongatio Perihelii a Nodo descendente $45^o. 59'. 24''$, et tum quidem Longitudines Cometae his Elementis conformes, pro momentis saepius commemoratis, sequentes habebuntur:

Long. Com.			
2 Aug.	3 ^s .	5 ^o . 49 ⁱ .	1 ^{''}
12 -	3	10. 34.	31
29 -	3	21. 0.	20
1 Octob.	4	10. 12.	6
Differ. + 13'. 31''			
+ 17			
- 17			
+ 0.			

Experimento autem instituto reperitur, hunc errorem pro obseruatione, die 2 Aug. facta, minimum fere esse, qui prodit, quatenus obseruationum, diebus 12 Aug. et 10 Octob. institutarum, intenditur consensus.

§. 26. Iam itaque ultimo loco disquirendum est, quid fiat de obseruatione 1 Octob. instituta, adhibitis Elementis, quibus tres obseruationes, diebus 2, 12 et 29 Augusti factae, implentur? Ista autem Elementa sequentem in modum determinantur: Semiparameter orbitae = 1,2125511; Tempus Perihelii Aug. 12, 1500; Elongatio Perihelii a ☿ = 43°. 16'. 33'', et Longitudines Cometae, ex his elementis, pro momentis obseruationum adnotatis, deducendae, erunt:

Longit. Cometae.			Differ. ab observ.
2 Aug.	3°. 6'. 2'. 33''		- 1''
12 -	3. 10. 34. 34		+ 14
29 -	3. 21. 0. 11		- 8
1 Octob.	4. 9. 37. 14		+ 34'. 52

vbi quidem error, qui pro obseruatione die 1 Octob. facta resultat, enormis plane est. Caeterum heic obseruari meretur, quod si obseruationibus 2 et 12 Aug. satisfaciendum fit, eiusmodi quidem Elementa inueniri posse, quae minorem pro obseruatione diei 1 Octob. inuoluant errorem, interim tamen simul obseruationem die 29 Aug. institutam, valde sensibilibus obnoxiam reddi erroribus. Sic si semiparameter orbitae statuatur = 1,2302688; Tempus Perihelii Aug. 14, 2900; Elongatio a ☿ = 44°. 55'. 21'', erit Longitudo Cometae pro 1 Octob. 4°. 9'. 48'. 4'' et pro 29 Aug. 3°. 20°. 52'. 54'', vbi nunc quidem Longitudo die 29 Aug. obseruata, errori septem minutorum redditur obnoxia.

§. 27. Hoc igitur ratiocinio, vti speramus, exacte demonstratum est, posito, quod Tempus Periodicum Co-
me-

metae ad septem vsque annos affurgat, fieri nequaquam posse, vt omnes obseruationes secunda Cometae apparitione institutae, cum veritate consentiant, et inter illas saltem nonnullas occurrere, quae septem minutis primis a vero aberrant, quod scilicet fiet cum obseruatione die 12 Aug. facta, dum Elementa quaeruntur, quae obseruationibus dierum 2 Aug. 29 Aug. et 1 Octob. penitus quadrant. Ex ipsa vero rei indole, facile colligitur, quod si quatuor istae obseruationes, quas hic contemplati sumus, ad consensum inter se redigi non potuerint, et quidem, si eueniat, vt prima, tertia et quarta cum Elementis conciliantur, in secunda autem quispiam reperiatur error, tum multo maiores prodituros fore errores, si vel obseruationes prima, secunda et tertia cum Elementis consentiant, quarta discrepante, vel consensus obseruationum secundae, tertiae et quartae cum Elementis obtineatur, obseruatione prima discrepante; nam consensum obseruationum primae, secundae et quartae cum iisdem Elementis ne in potestate quidem esse, iam supra ostendimus.

§. 28. Si igitur hanc disquisitionem vltius prosequi velimus, sufficit vt, pro maiori adhuc Temporis Periodici incremento, quaeramus Elementa, quae cum obseruationibus prima, tertia et quarta consentiant, tumque inuestigemus, quantus dissensus inter haec Elementa et obseruationem secundam reperiatur. Hinc si ponamus tempus Periodicum 8. Annorum, pro Elementis orbitae has consequemur determinaciones: Semiparameter orbitae = 1, 2589255; Tempus Perihelii Aug. 17, 2300; Elongatio Perihelii a Nodo desc. = $47^{\circ}.32'.4''$, existente Longitudine Nodi Asc. vt in superioribus = $4^{\circ}.12'.0''$. Ex his

his vero Elementis Longitudines Cometae ita erunt determinatae :

Longit. Cometae.				Different. ab obseruat.
2	Aug.	3 ^s .	6 ^o . 2 ^l . 44 ^u	— 12 ^l
12	-	3.	10. 47. 42	— 12 ^l . 56
29	-	3.	21. 0. 43	— 4 ^o
1	Octob.	4.	10. 12. 6	+ 0

ita vt nunc quidem perspicuum fiat, aucto tempore Periodico errores obseruationum secundae apparitionis continuo magis magisque increfcere. Quam ob rem, etiamfi adhibito tempore Periodico sex annorum, Elementa orbitae facile detegantur, quae cum vniuerfis his obseruationibus consentiunt, tamen dubitare licet, an tempus Periodium 6 annorum cum dimidio, ita admitti queat, vt modo dictis obseruationibus verifimiles inducantur errores.

§. 29. Denique pro confirmando valore temporis Periodici a nobis inuento, fequens adhiberi poteft argumentum. Vtcunque motus Cometae per actionem telluris fuerit perturbatus, tamen pro certo ftatuere licebit, hinc ipfum Cometae per Perihelium tranfitum vix vnico die fuiſſe immutatum, nec in ipſa Cometae diſtancia Perihelii prae- grandes mutationes inde oriri potuerunt; ex quo concluditur, aſſumto certo valore temporis Periodici, obseruationes ante et poſt Cometae proximum ad tellurem acceſſum, ſaltem eo vſque conſentire debere, vt tempora praebeant pro tranſitu per Perihelium, quae vix vno vel altero die inter ſe diſcrepent. Iam vero ex calculis Cel. *Pingré*, pro orbita Parabolica, obseruationibus menſe Iunii inſtitutis, ſatiſfaciente, perspicuum fiet, quo magis augeatur tempus

Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I. X x Pe-

Periodicum Cometæ, eo citius tempus transitus per Perihelium incidere, eo autem minorem euadere valorem pro semiparametro orbitæ, quatenus nimirum ratio habeatur harum observationum mense Iunii institutarum. Nam ex calculis Cel. *Pingré* habetur tempus transitus per Perihelium Aug. d. 9. 0^b. 19^t. 17^u et semiparameter orbitæ = 1,25918, quarum determinationum prior eam, quam pro tempore Periodico 5 Annorum cum dimidio inuenimus, quatuor diebus antevertit. Contra autem ex calculis nostris, in superioribus allatis, perspicitur, ut observationibus secundæ apparitionis satisfiat, aucto tempore Periodico Cometæ, ipsum tempus Perihelii prorogari, ita ut pro Periodo Cometæ 8 annorum iam in 17 diem Augusti incidere debuisset, tum vero pro hac hypothese erit semiparameter orbitæ 1,25892, ideoque parum diuersus ab illo, quem pro orbita Parabolica inuenit Cel. *Pingré*.

§. 30 Sicque iam ad finem perduximus demonstrationem nostram, qua ostendere conati sumus, omnes valores, pro tempore Periodico Cometæ Anno 1770 obseruati, eo magis fieri erroneos, quo longius abluunt ab isto valore, quem in nostris Elementis adoptauimus, idque siue ratio habeatur omnium in vniuersum observationum, seu tantummodo earum, quæ secunda Cometæ apparitione factæ habentur. Facile autem nobis persuademus, ut vnusquisque, qui huius argumenti rigorosum quantumhabet examen inire voluerit, reperiet, omnes rationes adeo exacte a nobis esse subductas, ut contra huius ratiocinii vim vix quicquam aliud excipi queat, quam quod statuatur, observationibus prægrandes inesse errores. Verum si seriem harum observationum vsque ad 2 diem Octobris, a Cel. *Messier* singulari studio et industria continuatam, examine-

mus,

mus, tantum earum reperimus tam inter se quam cum Theoria consensum, vt plane pro re quam maxime incredibili haberi mereatur, plerasque harum obseruationum ingentibus obnoxias esse erroribus. Interim tamen si, contra omnem nostram spem, obseruationes fuerint erroneae, tum omnes quidem nostri calculi incassum erunt instituti, verum eo tamen magis venia nostri errori tunc dabitur, quod id vnice nostra disquisitione intendimus, vt ostenderemus, quid ex obseruationibus circa hunc Cometam institutis sequatur. Caeterum licet operae pretium non reputauimus, vt inquireremus, quanta diminutio pro tempore Periodico Cometae nostri, locum habere queat, quia vix quisquam in eam inclinabit opinionem, hoc tempus potius esse minuendum, quam augendum, tamen facili coniectura ex calculis nostris colligi potest, hanc diminutionem si semissem anni excedat, vix aliqua verisimilitudine gaudere.

§. 31. In priori de hoc argumento disquisitione examinauimus, quam prope Cometa hic noster accedere queat ad orbitas illorum Planetarum, quas in motu suo traiecit, et quamuis hae determinationes ob mutata Cometae Elementa, aliquatenus immutentur, tamen operae pretium non erit, vt hos calculos denuo exsequeremur, nisi pro orbita Iouis, quippe quum per propiorem Cometae ad Iouem accessum vtique fieri potuit, vt eius motus plane fuerit immutatus. Si igitur ex puncto N, vbi orbitae Cometae I N et Iouis C N se interfecant, intelligatur ad Eclipticam demissus arcus normalis N L; pro ineunte anno 1778 erit Longitudo puncti I = $3^{\circ}. 8'. 44''. 0''$ et puncti C = $4^{\circ}. 12'. 0''. 0''$, hinc arcus I C = $33^{\circ}. 16''. 0''$, tumque ob angulum N I L = $1^{\circ}. 19'. 10''$; et angulum N C L

X x 2

= 1° .

Tab. XIII.
Fig. 3.

$= 1^{\circ}.33' 40''$, fiet $IL = 90^{\circ}.54' 44''$; $CL = 57^{\circ} 38' 44''$, hinc $IN = 90^{\circ}.54' 43''$; $CN = 57^{\circ}.39' 19''$ et angulus $INC = 51^{\circ}.17''$. Tum vero ob Longitudinem puncti $N = 6^{\circ}.9^{\circ}.38' 44''$, et Longitudinem Aphelii $\varphi = 6^{\circ} 10^{\circ}.51' 27''$, fiet differentia harum Longitudinum $= 1^{\circ}.12' 43''$; et si locus Aphelii Iouis fuerit α , fiet $I\alpha = 92^{\circ}.7' 27''$, hincque $N\alpha = 1^{\circ}.12' 42''$. Porro si locus Aphelii Cometae super arcu CN sit A , fiet $CA = 44^{\circ}.17' 4''$ et $NA = 13^{\circ}.22' 15''$; hinc si locus Aphelii Cometae, ad orbitam Iouis reductus, sit a , fiet $Na = 13^{\circ}.22' 10''$, hinc $aa = 14^{\circ}.34' 52''$.

§. 32. Nunc igitur quum constet, pro binis orbitis, minimo angulo ad se inclinatis, proximam distantiam reperiri, ubi radii vectores ad Solem ducti inter se fiunt aequales, si pro Cometa binae constituentur hypotheser anomaliae ab Aphelio computatae $7^{\circ}.26'$ et $7^{\circ}.28'$, habebuntur Logarithmi pro distantibus a Sole $0,7366557$; $0,7365387$, at pro anomalia Iouis $7^{\circ}.8'$ est Logarithmus distantiae Iouis a Sole $= 0,736539$; vnde colligitur, distantias Iouis et Cometae a Sole proxime coincidere, existente anomalia Cometae a suo Aphelio $= 7^{\circ}.27' 59''$, hincque anomalia Iouis a suo Aphelio $7^{\circ}.6' 56''$; hinc quum Longitudo Aphelii Iouis sit $6^{\circ}.10^{\circ}.51' 27''$, erit Longitudo puncti in orbita Iouis ad quam proxime accedere potest $= 6^{\circ}.3^{\circ}.44' 31''$. Pro hoc autem puncto habetur distantia Iouis a Cometa $= 0,00836$ ideoque 119^{ma} pars distantiae mediae telluris a Sole. Quum itaque sit massa Iouis ad illam Solis, in ratione $340:365,412$, hinc concluditur, in proxima Iouis ad Cometam distantia vim Iouis actionem a Sole oriundam fere 396 vicibus fore
super-

superaturam. Porro si statuatur anomalia Cometae ab Aphelio A versus C computata $7^{\circ}.48'.48''$, fiet Logarithmus distantiae Cometae $= 0,735298$, tumque, reducto loco Cometae ad orbitam Iouis, fiet anomalia ab Aphelio Iouis $= 22^{\circ}.23'.37''$ et Longitudo huius puncti in orbita Iouis $5^{\circ}.18^{\circ}.27'.42''$, pro qua etiam est Logarithmus distantiae $= 0,735298$. Ex his autem fiet distantia Cometae a Ioue $= 0,0293$, siue vix 34^{ta} parte distantiae mediae Solis a tellure maior, et pro hoc loco actio Iouis illam Solis 32 vicibus exsuperabit.

§. 33. Praestabit autem ut nunc accuratius expendamus, quam prope Iupiter, dum in coniunctione cum Cometa Anno 1767 erat, ad eum accessit, seu etiam in quanta vicinia Cometae versabitur in proxima eius cum hoc Astro coniunctione Anno 1779. Quia igitur ipsum Aphelium Cometae contigit Anno 1767 die 28 Octobris h. 8 circiter, existente Longitudine Aphelii $5^{\circ}.26^{\circ}.16'26''$, hinc conficitur, die 27 Maii eiusdem anni fuisse Longitudinem Cometae $= 5^{\circ}.20^{\circ}.57'$, quae eadem quoque pro hoc die est Longitudo Iouis, vnde coniunctionem horum Astrorum isto die contigisse, necesse est. At pro eodem tempore quum sit Longitudo intersectionis orbitarum $= 6^{\circ}.9^{\circ}.28'$ et inclinatio earum inter se $51^{\circ}.38''$, propter distantiam Cometae a Sole $= 5,5340$, et distantiam Iouis a Sole $= 5,4423$, fiet distantia Iouis a Cometa $= 0,09531$ circiter, ex quo sequitur, actionem Iouis in Cometam Solis vi attractrice tribus vicibus fuisse maiorem, vnde ob motum Cometae, prope Aphelium admodum lentum, haec actio Iouis in motum Cometae effectum sensibilem habuisse, verisimilitudine haud destituitur.

§. 34. In proxima Cometae cum Ioue coniunctione, quae Anno 1779 continget, sequentia habentur observanda: Quoniam tempus Aphelii incidit Anno 1778 die 29 Decembris hora 10 circiter, coniunctio Iouis cum Cometa locum habebit Anno 1779 die 23 Augusti versus horam 12, existente utriusque Astri Longitudine $6^{\circ}.3^{\circ}.34'.26''$, et quum pro isto tempore sit Longitudo intersectionis orbitarum $6^{\circ}.9^{\circ}.39'$ et inclinatio $51'.17''$, distantia Iouis a Sole existente = 5,4520, distantia autem Cometae = 5,4590, habebitur distantia Iouis a Cometa = 0,0111, ideoque actio Iouis tunc temporis, actionem Solis 225 vicibus exsuperabit, quo ipso non potest non fieri, ut orbita Cometae totalem subeat mutationem. Caeterum facile intelligitur, has determinationes pro omnimode exactis non esse reputandas, nisi quatenus Elementa nostra summo rigore fuerint definita, et quidem ex comparatione harum conclusionum cum illis, quas in priori Dissertatione attulimus, perspicitur, si tempus Periodicum Cometae aliquantum imminuatur, tum ea de causa coniunctio Iouis cum Cometa aliquanto citius contingeret, quam secundum Elementa iam adoptata, ideoque et propius ad Longitudinem Cometae $5^{\circ}.18^{\circ}.28'$, ubi vnus proximorum accessuum Cometae ad orbitam Iouis situs est; simul vero coniunctio Anno 1779 aliquanto tardius continget, Longitudo igitur Cometae magis ac pro casu praecedente diverget a $6^{\circ}.3^{\circ}.44'$, quae locum habet pro accessu Cometae proximo ad orbitam Iouis, vnde actio Iouis in Cometam hac de ratione imminuetur. Siquidem autem in tempore Periodico Cometae definiendo, utique aliqua Latitudo admittenda est, facile concedimus calculis nostris.

modo

modo allatis id non esse tribuendum, ut ipsis demonstretur, quam praecise actionem Iupiter in sua coniunctione cum Cometa, siue Anno 1767, seu 1779 in hoc Astrum exercuerit, sed ut hinc verisimile reddatur, utique fieri potuisse, ut ob vim perturbatricem Iouis orbita Cometae plane fuerit immutata, ita ut ipse Cometa antehac motum suum in orbita a praesenti plane diuersa descripserit, itaque hanc ob rationem Cometam nunquam antea, saltem in ista orbita, cuius iam dedimus Elementa, fuisse obseruatum.

§. 35. Ope Elementorum nostrorum pro motu Cometae stabilitur, deducitur, distantia Cometae a tellure, pro isto momento, quo Anno 1770 die 1 Iulii hoc Astrum in proxima telluris vicinia versabatur $= 0,014953$, seu aequalis fere 70^{mae} parti distantiae mediae Solis a tellure, quae etiam distantia minima fere est, ad quam hoc Astrum orbitae telluris adpropinquare poterit; unde quum nullum sit indicium, actionem huius Cometae in nostrum globum terraqueum fuisse sensibilem, nec in posterum ab hoc Astro vllum periculum telluri imminabit; ex quo etiam tanto maior est ratio, ut animum omni metu ex appropinquatione Cometarum oriundo liberemus, quod inter omnes Cometas obseruatos, hic praecise sit, qui proxime ad tellurem accessit. Contra vero vix cum certitudine quicquam statuere licet de actione telluris in Cometam, quippe cuius rei examen calculis hunc in finem institutis, perficere nobis non licuit. Si autem aliqua fuerit actio telluris in Cometam, illa non potuit non valde exigua esse, quum adeo nobis successerit, obseruationes post
proxi-

proximum Cometae ad tellurem accessum factas cum illis, quae ante hanc adproximationem institutae sunt, ad consensum redigere. Et si fides habenda sit argumentis haud contemnendis, quibus Cel. *Du Séjour* in erudito suo de Cometis opere (*Essai sur les Comètes*) Sectionis 7 Articulo 1. ostendere annitur, Sphaeram actiuitatis telluris nostrae ultra 125 semidiametros telluris protendi non debere; pro casu praesenti actionem telluris pro insensibili habere necesse est, quippe quum proxima Cometae a tellure distantia 357 semidiametris telluris aequetur.

S V P P L E M E N T V M
A D
DISSERTATIONES NOVIS COMMENTARIIS
INSERTAS,
D E
ECLIPSIBVS SOLARIBVS
ANNIS 1769 et 1773 OBSERVATIS,
VT ET OCCVLATIONIBVS FIXARVM
A LVNA.

A u c t o r e
A. I. LEXELL.

§. I.

Ex eo tempore, quo commemoratas Eclipses Solares et fixarum a Luna occultationes computo subieci, plurimae postmodum ad meam notitiam peruenerunt observationes eorundem phaenomenorum, quas etiam calculo subiicere eo magis e re esse existimaui, quod per nonnullas earundem calculi mei prius instituti vel confirmari, vel emendari possent; tumque egregius earundem adhiberi posset vsus, ad determinandas Longitudines locorum, in quibus institutae fuerunt. Conclusiones autem ex his calculis deductas, hac occasione dum succinctae exponere constitui, rem Astronomis non prorsus ingratam me praestitutum esse confido.

De Eclipsi Solis Anno 1769 obseruata,
conferatur Tom. XV. Nouor. Comment. pag. 588. et seqq.

§. 2. Antequam expressiones pro tempore conjunctionis ex obseruationibus deductas heic exposuero, primum principalia Elementa calculi pro singulis obseruationibus adferre animus est, vt scilicet eo facilius sit iudicium, vtrum mei calculi rite sibi constant, nec ne. Quamuis enim eadem mihi ac plurimis aliis Astronomis, libertas concessa esse posset, vt vltimas conclusiones ex calculis erutas tantum exponerem; tamen quum multiplici experientia edoctus sim, hisce in calculis saepe ab exercitatissimo etiam calculatore errores committi posse, operae pretium esse duxi, Elementa calculi fideliter exponere, quo facilius mearum conclusionum sit examen.

§. 3. Phaenom. obser.	Paral. Long.	Lat. ☉ appar.	Semid. ☉ apprens.	Diff. Long. ☉ et ☉ app.
Gryphiswald Initium	27'. 13'', 2	18'. 14'', 6	16'. 54'', 3	27'. 7'', 5
- - - - Finis	17. 52, 1	18. 22, 0	16. 57, 9	27. 6, 3
Tolosatii - Initium	39. 0, 7	21. 22, 8	16. 51, 3	24. 39, 7
- - - - Finis	33. 59, 4	23. 11, 9	16. 55, 7	23. 3, 1
Burdegalac - Initium	38. 9, 3	19. 55, 8	16. 50, 9	25. 50, 3
- - - - Finis	29. 46, 6	25. 49, 0	16. 56, 9	20. 7, 3
Austorpi - Initium	30. 11, 8	14. 30, 4	16. 53, 9	29. 14, 9
- - - - Finis	25. 8, 0	15. 8, 1	16. 53, 3	28. 59, 5
Brestiae - - - Finis	31. 10, 4	18. 3, 1	16. 54, 4	27. 15, 6
Gadeti - - - Initium	44. 50, 4	23. 39, 3	16. 48, 7	23. 4, 8
- - - - Finis	43. 2, 2	25. 47, 6	16. 54, 7	20. 1, 2
Promont. Initium	8. 1, 5	10. 37, 7	16. 54, 6	30. 55, 1
Cap Nord - Finis	5, 0	6. 41, 6	16. 55, 6	31. 56, 1
Hammerfoft - Finis	1. 7, 0	6. 54, 1	16. 55, 7	32. 42, 7

Phae-

Phaenom. obseru.	Paral. Long.	Lat. ☽ appar.	Semid. ☽ apparens.	Diff. Long. ☉ & ☾ app.
Caroli coronae Finis	14 ^l . 48 ^u , 9	17 ^l . 0 ^u , 7	16 ^l . 57 ^u , 3	27 ^l . 58 ^u , 6
- - - - - Finis	24. 37. 0	17. 25, 7	16. 54, 8	27. 39, 9
Eft Dereham Initium	31. 1, 9	15. 44, 1	16. 51, 8	28. 36, 3
- - - - - Finis	25. 18, 4	16. 31, 7	16. 55, 8	28. 13, 7
Lipsiae - - - Finis	20. 59, 8	19. 16, 3	16. 57, 4	26. 28, 0
Misniae - - - Finis	20. 37. 4	20. 39, 6	16. 57, 5	25. 24, 0
Heracleae Calpe				
Gibaltar. Initium	44. 48, 4	24. 22, 8	16. 49, 4	21. 39, 0
- - - - - Finis	43. 11, 6	26. 29, 4	16. 52, 9	19. 6, 7
Hawkhill - - - Finis	23. 38, 6	13. 16, 3	16. 55, 2	29. 53, 4
Ingolstadii - - - Finis	24. 2, 8	22. 9, 4	16. 57, 4	24. 6, 1
Kirknewton - - - Finis	23. 42, 1	13. 10, 6	16. 55, 2	29. 45, 8
Leicestriae - Initium	31. 15, 7	15. 16, 4	16. 51, 6	28. 51, 0
- - - - - Finis	26. 10, 8	16. 1, 6	16. 55, 5	28. 30, 8
Mediolani - - - Finis	28. 34, 5	24. 8, 0	16. 56, 9	22. 6, 7
Wanhalinna Initium	18. 19, 4	16. 11, 9	16. 55, 5	28. 25, 0
- - - - - Finis	7. 13, 1	14. 31, 7	16. 57, 6	29. 20, 6
Oxonii - - - Initium	32. 6, 1	15. 39, 7	16. 51, 4	28. 38, 2
- - - - - Finis	27. 3, 6	16. 36, 1	16. 55, 4	38. 10, 8
St. Huberti - - - Finis	28. 40, 2	19. 29, 0	16. 55, 6	26. 16, 4
Schirburni - Initium	32. 9, 5	15. 47, 2	16. 51, 4	28. 53, 9
- - - - - Finis	27. 3, 4	16. 44, 2	16. 55, 5	28. 6, 1
Castellum - Initium	34. 17, 1	19. 11, 0	16. 52, 3	26. 25, 4
Saronis - - - Finis	28. 9, 8	20. 10, 5	16. 56, 1	25. 41, 7
Vranieburgi - - - Finis	16. 37, 5	16. 42, 5	16. 57, 1	28. 9, 1
Vpfaliae - - - Finis	10. 40, 6	14. 21, 6	16. 57, 4	29. 25, 4
Herbipoli - - - Finis	23. 52, 7	20. 56, 5	16. 57, 0	25. 9, 8
Pifis - - - - - Finis	29. 46, 6	25. 49, 0	16. 56, 9	20. 7, 3

§. 4. His praemissis ipfas expressiones pro temporibus coniunctionum adferemus, vbi quidem, quia in Tomo XV Commentariorum demonstrauius esse correctionem Latitudinis $y = -22''$ saltem proxime, posuimus statim $y = -10$, vnde momenta pro temporibus coniunctionum ita habebuntur expressa :

Promont. Lezard 20^b. 0^l. 39^{ll} + 1,92 δ - 0,91 y + 1,63 π
ex initio.

20. 0. 44 - 1,96 δ + 1,01 y + 0,19 π
ex fine.

Grenouici - 5 - 3,88 δ + 1,92 y - 1,44 $\pi = 0$
20. 21. 27 + 1,94 δ - 0,96 y + 1,61 π
ex initio.

20. 21. 36 - 1,98 δ + 1,04 y + 0,09 π
ex fine.

Lutetiae Parif. 9 - 3,92 δ + 2,00 y - 1,52 $\pi = 0$
20. 30. 42 + 2,04 δ - 1,15 y + 1,76 π
ex initio.

20, 31. 0 - 2,11 δ + 1,27 y + 0,03 π
ex fine.

Bononiae - 18 - 4,15 δ + 2,42 y - 1,73 $\pi = 0$
21. 6. 54 + 2,49 δ - 1,84 y + 2,12 π
ex initio.

21. 7. 14 - 2,70 δ + 2,10 y - 0,28 π
ex fine.

Caianeburgi - 20 - 5,19 δ + 3,94 y - 2,40 $\pi = 0$
22. 12. 31 + 1,89 δ - 0,86 y + 0,99 π
ex initio.

22. 12. 29 - 1,81 δ + 0,66 y - 0,38 π
ex fine.

- 2 - 3,70 δ + 1,52 y - 1,37 $\pi = 0$
Petro-

- Petropoli - $22^{\circ} 22' 47'' + 2,03 \delta - 1,12 y + 1,19 \pi$
 ex initio.
 $22. 22. 47 - 1,39 \delta + 0,93 y - 0,49 \pi$
 ex fine.
 $0 - 3,95 \delta + 2,05 y - 1,68 \pi = 0$
- Wardhus - $22. 26. 22 + 1,80 \delta - 0,64 y + 0,69 \pi$
 ex initio.
 $22. 25. 51 - 1,74 \delta + 0,39 y - 0,25 \pi$
 ex fine.
 $- 31 - 3,54 \delta + 1,03 y - 0,94 \pi = 0$
- Umbae - $22. 38. 24 + 1,87 \delta - 0,81 y + 0,84 \pi$
 ex initio.
 $22. 38. 15 - 1,78 \delta + 0,56 y - 0,44 \pi$
 ex fine.
 $- 9 - 3,65 \delta + 1,37 y - 1,28 \pi = 0$
- Guriefi - $23. 48. 35 + 6,25 \delta - 6,00 y + 2,54 \pi$
 ex initio.
 $23. 49. 51 - 3,89 \delta + 3,50 y - 1,59 \pi$
 ex fine.
 $76 - 10,14 \delta + 9,50 y - 4,13 \pi = 0$
- Orenburgi - $24. 1. 17 + 3,25 \delta - 2,78 y + 1,38 \pi$
 ex initio.
 $24. 2. 6 - 2,49 \delta + 1,83 y - 1,22 \pi$
 ex fine.
 $49 - 5,74 \delta + 4,61 y - 2,60 \pi = 0$
- Iakuti - $29. 0. 9 + 1,82 \delta - 0,68 y - 0,45 \pi$
 ex initio.
 $29. 0. 15 - 1,69 \delta + 0,05 y - 1,08 \pi$
 ex fine.
 $6 - 3,51 \delta + 0,73 y - 0,63 \pi = 0$

Cauae	-	19 ^b . 51. 57 ^u + 1, 83 δ - 0, 70 y + 1, 37 π
ex initio.		
Hafniae	-	21. 11. 55 - 1, 97 δ + 1, 02 y - 0, 16 π
ex fine.		
Windobonae	-	21. 27. 7 - 2, 46 δ + 1, 79 y - 0, 37 π
ex fine.		
Stockholmiae	-	21. 33. 48 - 1, 90 δ + 0, 86 y - 0, 25 π
ex fine.		
Pello	-	21. 57. 43 - 1, 77 δ + 0, 53 y - 0, 29 π
ex fine.		
Kolae	-	22. 33. 29 - 1, 75 δ + 0, 46 y - 0, 39 π
ex fine.		
Ponae	-	23. 5. 59 - 1, 78 δ + 0, 54 y - 0, 53 π
ex fine.		
Lundae	-	21. 14. 20 - 1, 97 δ + 1, 02 y - 0, 17 π
ex fine.		
Gryphiswald.	-	21. 14. 46 + 2, 04 δ - 1, 13 y + 1, 56 π
ex initio.		
		21. 15. 5 - 2, 05 δ + 1, 16 y - 0, 17 π
ex fine.		
		18 - 4, 09 δ + 2, 29 y - 1, 73 π = 0
Tolosatii	-	20. 27. 7 + 2, 23 δ - 1, 46 y + 2, 03 π
ex initio.		
		20. 27. 25 - 2, 40 δ + 1, 71 y - 0, 00 π
ex fine.		
		18 - 4, 63 δ + 3, 17 y - 2, 03 π = 0
Burdegalaе	-	20. 19. 10 + 2, 13 δ - 1, 27 y + 1, 93 π
ex initio.		
		20. 19. 19 - 2, 30 δ + 1, 57 y + 0, 05 π
ex fine		
		9 - 4, 43 δ + 2, 84 y - 1, 88 π = 0
		Austrorp

Austorp - 20^b. 15^l. 41^{ll} + 1, 88 δ - 0, 84 y + 1, 49 π
ex initio.

20. 15. 47 - 1, 91 δ + 0, 88 y + 0, 12 π
ex fine.

$$6 - 3, 79 \delta + 1, 72 y - 1, 37 \pi = 0$$

Brestiae - 20. 3. 43 - 2, 02 δ + 1, 12 y + 0, 17 π
ex fine.

Gadeti - 19. 56. 32 + 2, 35 δ - 1, 73 y + 1, 92 π
ex initio.

19. 56. 30 - 2, 76 δ + 2, 18 y + 0, 04 π
ex fine.

Promont. - 2 - 5, 11 δ + 3, 91 y - 1, 88 $\pi = 0$

Cap Nord 22 5, 11 + 1, 78 δ - 0, 58 y + 0, 68 π
ex initio.

22 5. 18 - 1, 71 δ + 0, 44 y - 0, 33 π
ex fine.

$$7 - 3, 49 \delta + 1, 02 y - 1, 01 \pi = 0$$

Hammerfoft 21. 56. 19 - 1, 73 δ + 0, 37 y - 0, 25 π
ex fine.

Caroli coronae 21. 23. 50 + 2, 00 δ - 1, 06 y + 1, 43 π
ex initio.

21. 23. 41 - 1, 98 δ + 1, 03 y - 0, 20 π
ex fine.

$$- 9 - 3, 98 \delta + 2, 09 y - 1, 63 \pi = 0$$

Est Derehami 20. 25. 27 + 1, 92 δ - 0, 93 y + 1, 56 π
ex initio.

20. 25. 13 - 1, 94 δ + 0, 97 y + 0, 08 π
ex fine.

$$- 14 - 3, 86 \delta + 1, 90 y - 1, 48 \pi = 0$$

Heracl. Calpe 20. 0. 32 + 2, 54 δ - 1, 90 y + 1, 93 π
ex initio.

Calpe

Calpe	-	20 ^b . 01.50 ^h - 2, 87 δ + 2, 32 γ - 0, 01 π
ex fine.		18 - 5, 41 δ + 4, 22 γ - 1, 94 π = 0
Lipsiae	-	21. 11. 3 - 2, 15 δ + 1, 33 γ - 0, 14 π
ex fine.		
Misniae	-	21. 14. 57 - 2, 18 δ + 1, 37 γ - 0, 21 π
ex fine.		
Hawkhill	-	20. 8. 57 - 1, 85 δ + 0, 75 γ + 0, 13 π
ex fine.		
Ingolstadii	-	21. 7. 11 - 2, 30 δ + 1, 55 γ - 0, 19 π
ex fine.		
Kirknewton	-	20. 7. 41 - 1, 85 δ + 0, 75 γ + 0, 13 π
ex fine.		
Leicestriae	-	20. 17. 1 + 1, 91 δ - 0, 90 γ + 1, 53 π
ex initio.		20. 17. 6 - 1, 94 δ + 0, 95 γ + 0, 11 π
ex fine.		5 - 3, 85 δ + 1, 85 γ - 1, 42 π = 0
Mediolani	-	20. 58. 27 - 2, 50 δ + 1, 84 γ - 0, 19 π
ex fine.		
Wanhalinna	-	21. 51. 34 + 1, 94 δ - 0, 96 γ + 1, 19 π
ex initio.		21. 51. 22 - 1, 88 δ + 0, 84 γ - 0, 33 π
ex fine.		- 12 - 3, 82 δ + 1, 80 γ - 1, 42 π = 0
Oxonii	-	20. 16. 28 + 1, 92 δ - 0, 92 γ + 1, 59 π
ex initio.		20. 16. 39 - 1, 96 δ + 1, 00 γ + 0, 12 π
ex fine.		11 - 3, 88 δ + 1, 92 γ - 1, 47 π = 0
St. Huberti	-	20. 28. 35 - 2, 10 δ + 1, 24 γ + 0, 05 π
ex fine.		Saro

Saron	-	$20^h.35^l.51'' + 2,07 \delta - 1,20 \gamma + 1,80 \pi$
ex initio.		
		$20.36.12 - 2,14 \delta + 1,32 \gamma + 0,00 \pi$
ex fine.		
		$21 - 4,21 \delta + 2,52 \gamma - 1,80 \pi = 0$
Shirburni	-	$20.17.39 + 1,92 \delta - 0,93 \gamma + 1,58 \pi$
ex initio.		
		$20.17.38 - 1,97 \delta + 1,01 \gamma + 0,11 \pi$
ex fine.		
		$-1 - 3,89 \delta + 1,94 \gamma - 1,47 \pi = 0$
Vranieburgi		$21.12.20 - 1,96 \delta + 0,99 \gamma - 0,16 \pi$
ex fine.		
Vpſaliae	-	$21.32.4 - 1,88 \delta + 0,82 \gamma - 0,24 \pi$
ex fine.		
Herbipoli	-	$21.1.16 - 2,19 \delta + 1,40 \gamma - 0,14 \pi$
ex fine.		
Piſis	-	$21.3.14 - 2,74 \delta + 2,17 \gamma - 0,27 \pi$
ex fine.		

Heic vero obſeruare conuenit, quod aequatio pro Pariſiſ multum diſcrepans ſit ab illa, quam in Tomo XV Comment. adhibuimus, quia nunc pro initio Eclipſis momentum a Celeb. *Bailly* obſeruatum, ſubſtituimus in locum momenti a Celeb. *Meſſier* aſſignati, quippe quod minus exactum videbatur.

§. 5. Quamuis valores in Tomo XV Commentar. pro δ , γ , π aſſignati, aequationibus plerisque, ſaltem fide maxime dignis, ſatiſfaciant, tamen vt errores aequo iure inter obſeruaciones Gurieſenſes et Orenburgenſes diſtribuantur, exiſtimaui correctionem Latitudinis ſupponi poſſe $-24''$, ita vt ſit pro noſtris expreſſionibus $\gamma = -14$, poſitis vt antea $\delta = -3$ et $\pi = -3$. Patet autem
Acta Acad. Imp. Sc. Tom. II. P. I. Z z his

his substitutis valoribus aequationem pro Lutetia Parisiorum et Grenouico bene impleri, pro quibus locis observationes institutae merito fundamenti loco substerni poterunt, ut per comparisonem cum illis Longitudines reliquorum locorum explorentur. Caeterum non dubito quin aliquantulum diminutis valoribus ipsorum δ et π , etiam paulo minor valor pro y aequationibus satisfaciens inueniri posset; tamen certo persuasus sum, vix hunc valorem vltra bina, vel ad summum tria scrupula secunda, diminui posse. Nec ex immutatis his valoribus ipsorum δ , y , π insigniores variationes deriuari possunt in determinationem Longitudinum, nisi pro Gurjes, quia, uti iam vidimus, coefficientes ipsorum δ , y , π pro hoc loco praegrandes sunt. Quicquid vero sit, valores ipsorum δ , y , π modo recensitos adhibebimus, quorum substitutione facta, momenta pro temporibus coniunctionum ita erunt expressa:

Momentum pro tempore coniunct. ☉ et ☽.		Long. in tempore a Merid. Obseru. Paris.
Lutetiae Parisior.	- 20 ^b . 30 ⁱ . 47 ⁱⁱ (I)	
	20. 30. 49 (II)	
Promont. Lezard	- 20. 0. 41 (I)	0 ^b . 30 ⁱ . 6 ⁱⁱ Occid.
	20. 0. 39 (II)	0. 30. 10
Obseruat. Grenou.	- 20. 21. 29 (I)	0. 9. 18 Occid.
	20. 21. 27 (II)	0. 9. 22 Occid.
Obseruat. Bonon.	21. 7. 6 (I)	*0. 36. 19 Orient.
	21. 6. 54 (II)	0. 36. 5
Cajaneburgi	22. 12. 34 (I)	0. 41. 47 Orient.
	22. 12. 29 (II)	0. 41. 40
Obseruat. Petropolit.	22. 22. 53 (I)	1. 52. 6 Orient.
	22. 22. 41 (II)	1. 51. 52
Wardhus.	- 22. 26. 21 (I)	*1. 55. 44 Orient.
		Ward-

Momentum pro tempore coniunct. ☉ et ☾.				Long. in tempore a Merid. Obser. Parif.		
Wardhus -	22 ^b . 25 ^l . 53 ^u	(II)		1 ^b . 55 ^l . 4 ^u		
Vmbae -	22. 38. 30	(I)		*2. 7. 43	Orient.	
	22. 38. 18	(II)		2. 7. 29		
Gurjef -	23. 49. 35	(I)		*3. 18. 48	Orient.	
	23. 49. 18	(II)		3. 18. 29		
Orenburgi -	24. 1. 45	(I)		3. 30. 58	Orient.	
	24. 1. 52	(II)		3. 31. 3		
Iakutsk -	29. 0. 12	(I)		8. 29. 25	Orient.	
	29. 0. 23	(II)		8. 29. 35		
Cauae -	19. 51. 56	(I)		0. 38. 51	Occid.	
Obferu. Hafnienf.	21. 11. 47	(II)		0. 40. 58	Orient.	
Obferu. Windobon.	21. 26. 51	(II)		0. 56. 2	Or.	
Obferu. Stockholm.	21. 33. 42	(II)		1. 2. 53	Or.	
Pello -	21. 57. 44	(II)		1. 26. 55	Or.	
Kolac -	22. 33. 31	(II)		2. 2. 44	Or.	
Ponoi -	23. 6. 0	(II)		2. 35. 11	Or.	
Obferu. Lundenf. -	21. 14. 12	(II)		0. 43. 23	Or.	
Obferu. Gryphiswald.	21. 14. 51	(I)		0. 44. 4	Or.	
	21. 14. 55	(II)		0. 44. 6		
Lipfiae -	21. 10. 51	(II)		0. 40. 2	Or.	
Mifniae -	21. 14. 45	(II)		0. 43. 56	Or.	
Tolofatii -	20. 27. 15	(I)		0. 3. 32	Occid.	
	20. 27. 19	(II)		0. 3. 40		
Burdegalae	20. 19. 16	(I)		0. 11. 31	Occ.	
	20. 19. 4	(II)		0. 11. 45		
Aufstorp -	20. 15. 42	(I)		0. 15. 5	Occ.	
	20. 15. 40	(II)		0. 15. 9		
Breffiae -	20. 3. 44	(II)		0. 27. 15	Occ.	
Obferu. Gadeti -	19. 56. 46	(I)		*0. 34. 1	Occ.	

Momentum pro tempore coniunct. ☉ et ☽				Longit. in tempore a Merid. Observ. Paris.	
Observ. Gadeti	-	19 ^b . 56 ^l . 9 ^u	(II)	0 ^b . 34 ^l . 40 ^u	Occ.
Prom. Cap. Nord		22. 5. 12	(I)	1. 34. 23	Or.
		22. 5. 20	(II)	1. 34. 31	
Hammerfoft		21. 56. 22	(II)	1. 25. 33	Or.
Caroli coronae		21. 23. 54	(I)	* 0. 53. 7	Or.
		21. 23. 33	(II)	0. 52. 45	
Est Derehami		20. 25. 30	(I)	* 0. 5. 17	Occ.
		20. 25. 5	(II)	0. 5. 44	
Heracleae Calpe		20. 0. 44	(I)	* 0. 30. 3	Occ.
al. Gibaltar		20. 0. 26	(II)	0. 30. 23	
Hawkhill		20. 8. 54	(II)	0. 21. 55	Occ.
Ingolstadii		21. 6. 56	(II)	0. 36. 7	Or.
Kirknewton		20. 7. 38	(II)	0. 23. 11	Occ.
Leicestriae		20. 17. 3	(I)	0. 13. 44	Occ.
		20. 16. 58	(II)	0. 13. 51	Occ.
Observat. Mediolan.		20. 58. 9	(II)	0. 27. 20	Or.
Wanhalinna		21. 51. 38	(I)	* 1. 20. 51	Or.
		21. 51. 16	(II)	1. 20. 27	
Observat. Oxon.		20. 16. 30	(I)	0. 14. 17	Occ.
		20. 16. 30	(II)	0. 14. 19	
St. Huberti		20. 28. 24	(II)	0. 2. 25	Occ.
Saron	-	20. 35. 56	(I)	0. 5. 9	Or.
		20. 36. 0	(II)	0. 5. 11	
Shirburn		20. 17. 36	(I)	0. 13. 11	Occ.
		20. 17. 29	(II)	0. 13. 20	
Uranieburgi		21. 12. 12	(II)	0. 41. 23	Or.
Observat. Upsaliense		21. 31. 59	(II)	1. 1. 10	Or.
Herbipoli		21. 1. 5	(II)	0. 30. 16	Or.
Observat. Pisan.	-	21. 2. 53	(II)	0. 32. 4	Or.

vbi obseruandum, breuitatis causa momenta coniunctionum ex obseruationibus pro initio et fine Eclipsis respectiue his numeris (I) et (II) indigitari. Caeterum nulla quidem est dubitandi ansa, quin haec momenta pro tempore coniunctionis, sub hypothese assumptarum correctionum pro δ , γ , π rite se habeant, nisi pro obseruationibus in Gurjes institutis, saltem illa pro initio. Adhibitis autem correctionibus pro δ , γ , π , si pro hoc loco calculus pro tempore coniunctionis repetatur, prodibit istud momentum $23^b.49'.30''$, quod quinque secundis a supra allato differt et melius quidem consentit cum momento coniunctionis ex fine Eclipsis deducto.

§. 6. Vt conclusiones prius allatae eo magis stabiliantur, examinemus quoque, quomodo Longitudines locorum determinentur pro illis locis, vbi initium et finem Eclipsis obseruare licuit, idque si vel maxime nulla habeatur ratio correctionum δ , γ , π . Si igitur momenta coniunctionum ex obseruationibus pro fine et initio Eclipsis coniunctim sumantur, sequentes prodibunt expressiones:

		Longit. a Paris.
Lutetia Paris.	$20^b.30'.51'' + 0,06\gamma + 0,90\pi$	
Grenovic.	$20.51.32 + 0,04\gamma + 0,85\pi$	$9'.19''. \text{Occ.}$
Prom. Lezard.	$20.0.42 + 0,05\gamma + 0,91\pi$	$30.9. \text{Occ.}$
Cajaneburg.	$22.12.30 - 0,10\gamma + 0,32\pi$	$41.43. \text{Or.}$
Petropol.	$22.22.47 - 0,10\gamma + 0,35\pi$	$1^b.51.58. \text{Or.}$
Jakutsk	$29.0.12 - 0,33\gamma - 0,76\pi$	$8.29.31. \text{Or.}$
Gryphiswald.	$21.14.55 + 0,03\gamma + 0,70\pi$	$0.44.5. \text{Or.}$
Tolofat.	$20.27.16 + 0,12\gamma + 1,00\pi$	$0.3.36. \text{Occ.}$
Austorp.	$20.15.44 + 0,02\gamma + 0,80\pi$	$0.15.7. \text{Occ.}$

Cap Nord	$22^b. 5'. 14'' - 0.07y + 0.17\pi$	$1^b. 34'. 28''$. Or.
Leicest.	$20. 17. 4 + 0.2y + 0.81\pi$	13. 47. Occ.
Oxon.	$20. 16. 34 + 0.04y + 0.85\pi$	14. 17. Occ.
Saron.	$20. 36. 2 + 0.06y + 0.90\pi$	5. 11. Or.
Shirburn	$20. 17. 38 + 0.04y + 0.85\pi$	13. 13. Occ.

In hac autem comparatione illas tantum observationes adhibuimus, pro quibus colligere licuit, initium Eclipsis non valde erroneum esse; tumque ad id etiam respectum habuimus, ne conclusio media, ex initio et fine deducta, insignes coëfficientes ipsorum δ , y , π innolueret, quare hac ratione observationes in Gurjef, Orenburg, Bononiae et Gadeti institutae cum reliquis non comparari possent, etiamsi momentum pro initio rite se haberet. Interim adhibito quodam artificio obtineri potest, ut isti coëfficientes δ , y , π saltem qua potiolem partem eliminantur, quod iam exemplo declarabimus. Sumamus igitur medium ex conclusionibus pro Gurjef, quod erit:

$$23^b. 49'. 13'' + 1.18\delta - 1.25y + 0.47\pi,$$

iam quia habetur pro Gurjef:

$$76 - 10.14\delta + 9.50y - 4.13\pi = 0,$$

si haec aequatio ducatur in 0.11, fiet:

$$8.4 - 1.11\delta + 1.04y - 0.45\pi = 0,$$

quae aequatio ad valorem pro tempore conjunctionis addita praebet:

$$23^b. 49'. 21'' + 0.07\delta - 0.21y + 0.02\pi,$$

vbi quidem iam saltem sine insigni errore coëfficientes ipsorum δ , y , π neglegi possunt, hinc vero fiet Longitudo Gurjef a Parisiis $3^b. 18'. 30''$. Ex observationibus Orenburgensibus simili ratione colligitur:

$$24^b. 1'. 42'' + 0.38\delta - 0.47y + 0.08\pi,$$

at

at pro Orenburg habetur aequatio :

$$49 - 5, 74 \delta + 4, 61 \gamma - 2, 60 \pi = 0,$$

cuius decima pars ad expressionem modo allatam addita praebet :

$$24^b. 4'. 47'' - 0, 19 \delta - 0, 01 \gamma - 0, 18 \pi,$$

vbi iterum coefficientes ipsorum δ , γ , π valde parui sunt, fietque Longitudo Orenburgensis $3^b. 30'. 56''$. Medium ex conclusionibus pro Bononia est :

$$21^b. 7'. 4'' - 0, 10 \delta + 0, 13 \gamma + 0, 92 \pi,$$

quod iam immediate cum conclusione Parisiensi conferri potest, vnde resultabit differentia Meridianorum $36'. 13''$, quae certe nimis magna est, ob aliquantum errorem, quo observatio initii huius Eclipsos affecta videtur.

§. 7. Ad vltiorem confirmationem nostrarum conclusionum, conducet, vt comparationem instituamus expressionum pro tempore coniunctionis praecipue ex fine Eclipsis deductarum, in quibus coefficientes ipsorum, δ , γ , π haud multum inter se discrepantes habentur. Cum expressione igitur pro observatorio

Parifino $20^b. 31'. 0'' - 2, 11 \delta + 1, 27 \gamma + 0, 03 \pi$ fequentes conferantur :

Gryphisw. $21. 15. 5 - 2, 05 \delta + 1, 16 \gamma - 0, 17 \pi$

Brestia $20. 3. 43 - 2, 02 \delta + 1, 12 \gamma + 0, 17 \pi$

St. Hubert. $20. 28. 35 - 2, 10 \delta + 1, 24 \gamma + 0, 05 \pi$

Saron $20. 36. 12 - 2, 14 \delta + 1, 32 \gamma + 0, 00 \pi$

Herbipolis $21. 1. 16 - 2, 19 \delta + 1, 40 \gamma - 0, 14 \pi$

Lipfia $21. 11. 3 - 2, 15 \delta + 1, 33 \gamma - 0, 14 \pi$

Mifnia $21. 14. 57 - 2, 18 \delta + 1, 37 \gamma - 0, 21 \pi$

vnde

vnde seposita consideratione correctionum fiet differentia Meridianorum, inter

Parif. et Gryphisw. 44'. 5". Or.	Inter Parif. et Saron. 5'. 12". Or.
Brestiam 27. 17 Oc.	et Herbipol. 30. 16. Or.
St. Hubert. 2. 25 Oc.	et Lipfiam, 40. 3. Or.
	et Misniam 43. 57. Or.

Procedamus nunc ad obseruationem Grenouicensem et quae cum illa commode comparari possunt :

	Longitud. a Merid. Gren.
Grenouic. 20 ^b . 21'. 36" - 1,98δ + 1,04γ + 0,09π	
Prom. Lez. 20. 0. 44 - 1,96δ + 1,01γ + 0,19π	20'. 52" Occ.
Petropolis 22. 22. 47 - 1,93δ + 0,93γ - 0,49π	2 ^b . 1. 9 Or.
Hafnia 21. 11. 55 - 1,97δ + 1,02γ - 0,16π	50. 19 Or.
Lunda 21. 14. 20 - 1,97δ + 1,02γ - 0,17π	52. 44 Or.
Gryphisw. 21. 15. 5 - 2,05δ + 1,16γ - 0,17π	53. 29 Or.
Car. corona 21. 23. 41 - 1,98δ + 1,03γ - 0,20π	1. 2. 5 Or.
Oxonium 20. 16. 39 - 1,96δ + 1,00γ + 0,12π	4. 57 Occ.
Shirburn 20. 17. 38 - 1,97δ + 1,01γ + 0,11π	3. 58 Or.
Uranieb. 21. 12. 20 - 1,96δ + 0,99γ - 0,16π	50. 44 Or.
Est Dereh. 20. 25. 13 - 1,94δ + 0,97γ + 0,08π	3. 37 Or.
Leicestria 20. 17. 6 - 1,94δ + 0,95γ + 0,11π	4. 30 Occ.

vbi si ponatur differentia Meridianorum inter obseruatorium Parisinum et Grenouicense 9'. 20" Occ. prodibunt Longitudines locorum a Meridiano Parisino computatae, haud multum discrepantes ab illis, quas supra attulimus. Videamus nunc quoque de obseruationibus, quae cum Stockholmienfi comparari possunt :

Long.

		Long. a Merid. Stockholm.
Pro Stockholmia	$21^b.33'.48''-1,90\delta+0,86\gamma-0,25\pi$	
Austorp	$20.15.47-1,91\delta+0,88\gamma+0,12\pi$	$1^b.18'.1''.$ Occ.
Est Dereham	$20.25.13-1,94\delta+0,97\gamma+0,08\pi$	1. 8. 35. Occ.
Hawkhill	$20.8.57-1,85\delta+0,75\gamma+0,13\pi$	1. 24. 51. Occ.
Kirknewton	$20.7.41-1,85\delta+0,75\gamma+0,13\pi$	1. 26. 7. Occ.
Leicestria	$20.17.6-1,94\delta+0,95\gamma+0,11\pi$	1. 16. 42. Occ.
Wanhalinna	$21.51.22-1,88\delta+0,84\gamma-0,33\pi$	17. 34. Or.
Upsalia	$21.32.4-1,88\delta+0,82\gamma-0,24\pi$	1. 44. Occ.

vnde si statuatur Longitudo obseruatorii Stockholmiensis a Parisino $1^b.2'.55''$, orientur Longitudines a Meridiano Parisino pro locis modo commemoratis, quae a supra §. 5. adductis vix tantillum different. Quia Longitudo loci pro Pello in Lapponia tam per Eclipsin Solis 1764, quam varias Satellitum Eclipses satis bene habetur determinata, iam quoque obseruationes in Lapponia institutas cum ista in Pello facta, comparare licebit:

		Long. a Merid. pro Pello.
Pro Pello	$21^b.57'.43''-1,77\delta+0,53\gamma-0,29\pi$	
Caianeburg	$22.12.29-1,81\delta+0,66\gamma-0,38\pi$	$14'.46''.$ Or.
Wardhus	$22.25.51-1,74\delta+0,39\gamma-0,25\pi$	28. 8. Or.
Umba	$22.38.15-1,78\delta+0,56\gamma-0,44\pi$	40. 32. Or.
Kola	$22.33.29-1,75\delta+0,46\gamma-0,39\pi$	35. 46. Or.
Ponoi	$23.5.59-1,78\delta+0,54\gamma-0,53\pi$	$1^b.8.16.$ Or.
Cap Nord	$22.5.18-1,71\delta+0,44\gamma-0,33\pi$	7. 35. Or.
Hammerfost	$21.56.19-1,73\delta+0,37\gamma-0,25\pi$	1. 24. Oc.

Transeamus autem nunc quoque ad obseruationes, quae cum Windobonenſi comparari poſſunt:

		Long. a Merid. Windobon.
Pro Windobona	$21^b. 27'. 7'' - 2,46\delta + 1,79\gamma - 0,33\pi$	
Orenburg	$24. 2. 6 - 2,49\delta + 1,83\gamma - 1,22\pi$	$2^b. 34'. 59''$. Or.
Toloſatio	$20. 17. 25 - 2,40\delta + 1,71\gamma - 0,00\pi$	1. 9. 42. Oc.
Burdegala	$20. 19. 19 - 2,30\delta + 1,57\gamma + 0,05\pi$	1. 7. 48. Oc.
Ingolſtadio	$21. 7. 11 - 2,30\delta + 1,55\gamma - 0,19\pi$	0. 19. 56. Oc.
Mediolano	$20. 58. 27 - 2,50\delta + 1,84\gamma - 0,19\pi$	0. 28. 40. Oc.

vbi ſi ſtatuatur Longitudo Meridiani Windobonenſis a Pariſienſi $56'. 10''$, prodirent differentiae Meridianorum a ſupra §. 5. allatis non multum diuerſae, niſi ſuſpicari lice-
ret, finem huius Eclipſis iuſto citius Windobonae fuiſſe ob-
ſeruatum. Denique comparationem inſtituamus obſerua-
tionis Bononiae circa finem Eclipſis inſtitutae, cum illis,
quae ipſi ſunt correſpondentes:

		Long. a Merid. Bononiienſi.
Pro Bononia	$21^b. 7'. 14'' - 2,70\delta + 2,10\gamma - 0,25\pi$	
Gadete	$19. 56. 29 - 2,76\delta + 2,18\gamma + 0,04\pi$	$1^b. 10'. 45''$. Occ.
HeracleaCalpe	$20. 0. 50 - 2,87\delta + 2,32\gamma - 0,01\pi$	1. 6. 24. Occ.
Piſis	$21. 3. 14 - 2,74\delta + 2,17\gamma - 0,27\pi$	4. 0. Occ.

vbi obſeruare conuenit differentiam Meridianorum inter obſeruatoria Pariſinum et Bononiienſe per varias obſerua-
tiones inuentam eſſe $36'. 6''$. Haec modo allata ſi bene
perpendantur, facile conſidimus, vnumquemque harum
re-

rerum aequum iudicem nobis largiturum, quod dubium istud, quo Celebris quidam Astronomus vsum Eclipsium Solarium, ad determinandas Longitudines locorum, infringere voluit, non eius esse momenti, ac ipse sibi persuaserat. Existimat enim has obseruationes pro fine commemorato, eo minori cum fructu adhiberi posse, quod conclusiones per calculos erutae, insignes variationes subire queant, propter correctiones, quibus Elementa calculi, vtpote Longitudo et Latitudo Lunae, Parallaxis et Diameter Lunae adfectae esse possunt. Verum praeterquam quod nonnullis saltem in casibus principalem harum correctionum, Latitudinis nimirum Lunae, exacte determinare liceat, etiamsi quoque hae correctiones plane manerent incognitae, tamen incidunt casus, quibus per comparationem conclusionum, in quibus correctiones δ , y , π neque fere magnis coefficientibus adficiuntur, differentiae Meridianorum independenter ab his correctionibus determinari possunt. Caeterum si nonnunquam continget, vt conclusiones a diuersis Eclipsibus elicitaе aliquantum inter se discrepent, perpendendum est, has obseruationes pro quantitatibus praecisione Geometrica definitis non esse habendas, quippe quum experientia comprobatum sit, eodem loco circa definiendum momentum pro fine Eclipsis, discrepantias inter obseruatores reperiri 10 et 12 secundorum. Verum si maiores discrepantiae in conclusionibus, vtpote 20 vel 30 scrupulorum secundorum reperiantur, tum certo contendere licet, in vna vel altera obseruatione insigniorem quandam latere errorem.

§. 8. Quum pleraeque harum obseruationum a Cel. *Du Séjour* computatae sint, qui etiam suas conclusiones iam dudum publici iuris fecit, haud praeter rem erit, vt de illis nostrarum conclusionum, quae a conclusionibus Cel. *Du Séjour* iusto magis differunt, dilucide exponamus; non quidem quod nostris calculis maiorem fidem vindicare velimus, sed vt saltem rationes explicemus, cur cum Cel. hoc Mathematico consentire nobis non liceat. De obseruatione quidem Guriefwenfi nihil adferre attinet, quippe quum insignis discrepantia hic resultare potest, prouti alii valores pro correctionibus δ , y , π adhibeantur, interim pro nostra conclusione militat, quod per eam obseruationes Guriefwenfes minus reddantur erroneae, ac secundum calculum *Dⁿⁱ Du Séjour*. Pro obseruatione Gaditana inter meam et *Dⁿⁱ Du Séjour* conclusionem discrepantia adest 15''; iam etiam si concedere vellem, correctiones δ , y , π ita definiri posse, vt conclusio prodeat 15'' a mea diuersa, tamen non video quomodo tum obseruationes Bononienses et Gaditanae inter se conciliari queant. Erit enim differentia Meridianorum ex obseruato sine $1^b. 10^l. 45'' + 0,06 \delta - 0,08 y - 0,29. \pi$, vnde si Longitudo pro Bononia supponatur $36. 10''$, erit Longitudo pro Gadete $34^l. 35''$; nequaquam autem $34^l. 25''$, vti perhibet *D^{nus} Du Séjour*. De meo autem calculo pro obseruatione Gaditana satis persuasus mihi sum, quum eam pluribus vicibus examini subiecerim. Adhuc minus perspicere licet, quomodo Cel. *Du Séjour* ad suas conclusiones pro Heraclea peruenerit, quippe quum illa pro fine a mea conclusione adeo $32''$ differat. Caeterum obseruare conuenit, quod Cl. *D^{nus} Mechain* ex obseruato sine Heracleae inuenerit Longitudinem huius loci $30^l. 13''$, quae

quae multo propius cum mea conclusione consentit. In nullis autem conclusionibus maius est discrimen, quam pro illis, quae observationibus St. Huberti et Saronis institutis, respondent; nec alia mihi explicatio huius discrepantiae probabilis videtur, quam quod Cel. *Du Séjour* alia forsitan momenta adhibuerit, quam quae in Commentariis Academ. Scientiar. Parisinae pro Anno 1769, vel in Dissertatione Cel. *de la Lande* (Mémoire sur le Passage de Venus) continentur; quod si vero iisdem usus est, tum sine vlla haesitatione pronunciare ausim, pro his saltem observationibus calculos Dⁿ *Du Séjour* rite sibi constare non posse. Praeterea nec ea quidem conclusio prorsus exacta mihi videtur, qua Cel. *Du Séjour* affirmat, ex initio Eclipsis Glasgowii observato, sequi huius loci Longitudinem 26'. 27"; nam si, uti in Transactionibus Societatis Londin. perhibetur, initium Eclipsis ibidem observatum sit 18^b. 30'. 14", hinc sequeretur Longitudo pro Glasgow, ista proposita saltem quinque minutis primis minor; nec aliud argumentum ad hoc comprobandum adducere opus est, quam quod perhibeatur, in Kirknewton initium Eclipsis quoque 18^b. 30'. 19" esse observatum, quum tamen inter hunc locum et Glasgow adsit in Longitudine differentia 3 Minutor. cum dimidio; et quia momentum allatum pro Kirknewton nimis tarde sit assignatum, id tanto magis de observatione Glasgowienfi valebit. Caeterum quod ad Longitudines locorum, quae in vicinia observatoriorum Londinensis et Parisiensis sita sunt, attinet, eas speciali calculo determinare superfluum existimaui, quia in tanta vicinia, differentia momentorum observatorum, saltem intra vnum vel alterum scrupulum secundum, differentiam Meridianorum exprimet. Heic autem sponte li-

quet, insignes discrepantias oriri, prouti vnum vel alterum momentum pro initio vel fine obseruato adhibeatur. Si pro obseruatorio Grenouicensi adhibeantur momenta a Cel. *Mafkelyne* assignata, pro initio $18^b.38'.54''$ et pro fine $20^b.23'.30''$, non concipere possum, quomodo ex illis, comparatis cum obseruationibus Cel. *Canton*, pro initio $18^b.38'.51''$ et pro fine $20^b.23'.18''$, deduci queat Longitudo loci vbi D^{nus} *Canton* obseruauerat $7''$ vel $17''$. Oc.

§. 9. Inter reliquas determinationes supra allatas quum praecipue commemorabilis sit illa pro Longitudine Vranieburgensi, quippe quum hic sit celebris locus, vbi insignis Astronomus *Tycho Brahe* suas faceret obseruationes; nonnulla adferemus momenta pro hac Longitudine vltius confirmanda. Primum igitur obseruo, ex obseruato fine Eclipsis Anno 1764 deduci Longitudinem pro Lunda Scanorum a Meridiano Parisino $43'.30''$, ita vt si medium sumatur ex hac conclusione et illa, quam §. 5 attulimus, statui queat Longitudo Lundenfis $47'.26''$. Porro ex mensuris, quibus Cel. *Schenmark* distantias inter Lundam, Vranieburgum et Hafniam determinauit, constat Hafniam Vranieburgo $29''$ occidentaliorē esse, Lundam vero ab Vranieburgo $1'.59''$ versus orientem esse sitam, quod cum determinationibus nostris §. 5 allatis bene consentit, nam ex illis est differentia Meridianorum inter Vranieburgum atque Lundam $2'$. Hincque iam certissime affirmare licebit, determinationem pro Longitudine Vranieburgensi a Cel. *Picard* allatam saltem 40 scrupulis secundis a veritate aberre; nec paucae illae obseruationes, circa Eclipses Satellitum Iouis a *Picard* institutae, conclusiones nostras multo tutiores infringere valebunt.

De Eclipsi Solis Anno 1773 obseruata.

Conferatur Nov. Comment. Tom. XVIII pag. 571.

§. 10. Hic iterum, vti pro Eclipsi Solis Anni 1769 obseruata, elementa calculi praemittere conueniet:

Phaenom. obseru.	Paral. Longit.	Latit. ☉ apparens.	Semid. ☉ apparens.	Different. Long. app.
Windobon. - Finis	16°. 36', 2	9°. 47'', 4	14°. 56'', 3	29°. 22'', 8
Schwezingae - Finis	16. 13, 3	10. 32, 8	14. 55, 0	29. 5, 6
Lutet. Parif. - Finis	16. 48, 4	10. 26, 9	14. 53, 7	29. 6, 4
Pifis - - - Finis	21. 17, 0	8. 18, 4	14. 54, 8	29. 48, 2
Montis Pessulani Finis	21. 28, 2	8. 33, 6	14. 53, 9	29. 43, 2
Petropoli - - - Finis	2. 15, 6	11. 49, 7	14. 58, 1	28. 39, 2
Dmitriewfk Initium	15. 4, 9	4. 56, 1	14. 55, 8	30. 33, 9
Pekin - - - Initium	23. 50, 0	16. 7, 7	15. 4, 5	23. 50, 0
- - - - - Finis	44. 43, 2	18. 5, 1	15. 0, 5	25. 13, 5

vnde sequentes valores pro tempore coniunctionis prodeunt:

pro Windobona (II)	18 ^b . 26'. 22'' - 2,29 δ - 0,72 γ + 1,33 π
Schwezinga (II)	17. 55. 11 - 2,30 δ - 0,76 γ + 1,38 π
Pifis - - (II)	18. 2. 34 - 2,25 δ - 0,61 γ + 1,41 π
Petropoli (II)	19. 22. 9 - 2,35 δ - 0,90 γ + 0,94 π
Dmitriewfk (I)	20. 22. 40 + 2,19 δ + 0,35 γ + 0,26 π
Pekin - (I)	25. 6. 32 + 2,54 δ - 1,32 γ - 0,31 π
(II)	25. 6. 21 - 2,67 δ + 1,56 γ - 2,29 π

§. 11. Nunc quidem pro vera differentia Meridianorum elicienda principale negotium eo rediret, vt valores

lores correctionum δ , y , π elicerentur; verum huic fini non nisi vnica suppetit obferuatio Pekinenfis ex qua obtinetur haec aequatio:

$$11 + 5,21 \delta - 2,88 y + 1,98 \pi = 0$$

vbi quidem fi ponatur $\delta = -2$, fieret $y = 0$, et fi pro δ valor aliquanto maior adhibeatur, vtpote -3 , fieret valor ipsius y adeo negatiuus, quod quidem minime consentire videtur cum menfuris Micrometro obiectiuo captis, quippe ex quibus concludendi ansam habui, Latitudinis correctionem fuiffe pofitiuam et vix minorem 10 scrupulis fecundis. At quum nullo criterio dignofci queat, vtrum error fiue in obferuatione Pekinenfi pro initio Eclipses, feu in noftra menfura distantiae minimae, lateat; iam confiderationem correctionum δ , y , π eo tutius fepondere licebit, quod qualiscunque fuerit correctio y , eam tamen quam minimam eſſe, neceſſe fit.

§. 12. Comparatis igitur obferuationibus Schwezingae et Piſis inſtitutis, cum Petropolitana et Windobonenſi, fiet differentia Meridianorum inter Petropolin et Schwezingam $1^b. 26'. 58''$, atque inter Petropolin et Piſas $1^b. 19'. 35''$; fimiliter inter obferuatorium Windobonenſe et Schwezingenſe erit differentia Meridianorum $31'. 11''$ et inter obferuatorium Windobonenſe atque Piſanum $23'. 48''$. Hinc fi Longitudo Petropolis ſupponatur a Meridiano Pariſino $1^b. 51'. 57''$ et Windobonae $56'. 10''$, erit Longitudo obferuatorii Schwezingenſis $24'. 59''$ a Pariſino, et Longitudo obferuatorii Piſani $32'. 22''$, vtraque orientalis. Praeterea fi obferuatio in Dmitriewſk pro initio Eclipses conferatur cum obferuatione Pekinenſi, fiet differentia Meridianorum inter Dmitriewſk et Pekinum $4^b. 43'. 52''$,
hinc-

hincque si Longitudo pro Pekin supponatur a Meridiano Parisino $7^b. 36'. 20''$, erit Longitudo Dmitriewsk ab eodem Meridiano $2^b. 52'. 28''$.

§. 13. Supra ex obseruatione Eclipsis Solis, Anno 1709 rursus instituta, inuenimus Longitudinem huius loci $32'. 4''$, ab obseruatorio Parisino, quae a modo allata nimis discrepare videtur. Cuinam autem harum conclusionum potior debeatur fides, id quidem discerni non potest; sufficit autem nobis, quod per has obseruationes innotuerit, Longitudinem obseruatorii Pisani saltem $32'$ esse maiorem, adeoque determinationem Longitudinis, ex obseruatis Eclipsibus Satellitum Iouis deriuatam, qua haec Longitudo statuitur $31'. 28''$, multum a veritate abludere. Praeterea hoc loco obseruari quoque meretur, quod si medium ex determinationibus pro Pekin, quod est:

$$25^b. 6'. 26'' - 0,06 \delta + 0,12 \gamma - 1,00 \pi$$

conferatur cum determinatione media pro Petropoli, Tom. XVIII Comment. pag. 595 allata:

$$19^b. 22'. 5'' - 0,02 \delta + 0,05 \gamma + 0,16 \pi,$$

reperietur differentia Meridianorum Pekinensis et Petropolitani: $5^b. 44'. 21'' + 0,17 \gamma - 1,16 \pi$; vbi si correctiones γ , π plane negligantur, fiet Longitudo pro Pekin a Meridiano Parisino $7^b. 36'. 18''$, quae egregie consentit cum determinatione ex variis aliis obseruationibus conclusa.

§. 14. Obseruationis Parisinae hac occasione non eo fine fecimus mentionem, vt inde conclusiones quasdam deducere vellemus, quippe quum, ipsis fatentibus obseruatoribus, haec obseruatio valde sit dubia, ob Solem va-

poribus horizontis tempore obseruationis plane immersum; interim tamen, hac difficultate non obstante, vix maior quam $26''$ scrupulorum secundorum error obseruationi Parisinae inesse potest; adhibita enim obseruatione Cel. *Messier* fiet tempus coniunctionis pro Meridiano Parisino $17^b. 29'. 46''$, quod cum momentis pro Petropoli et Windobona collatum, ostendit, errorem obseruationis Parisiensis vix $26''$ excedere posse. Cum obseruatione autem, quae Montis Pessulani instituta perhibetur, longe alia est ratio, nam ex hac obseruatione sequeretur, finem Eclipsis integris quatuor minutis tardius hoc loco fuisse visum, quam ex calculo sequi deberet. Nam si Finis Eclipsis in hoc loco Tempore vero $17^b. 59'. 1''$, obseruatus fuisset, vti affirmatur in Commentariis Acad. Scient. Parisiensis pro Anno 1774 Pag. 693, inde sequeretur pro Monte Pessulano tempus coniunctionis fuisse $17^b. 41'. 7''$, ideoque differentia Meridiani huius loci a Petropoli $1^b. 41'. 2'$, hinc a Meridiano Parisino $10'. 55''$, quae fere quinque Minutis primis nimis magna est. Ne autem dici posset, meis calculis aliquem forsan errorem irrepsisse, eosdem primum pro momento allato variis rationibus repetere operae pretium duxi, tumque insuper si momento huic 4 Minutorum primorum correctio adplicetur, inueni momentum coniunctionis $17^b. 36'. 58''$, reliquis Elementis calculi pro hoc momento vti sequitur inuentis:

Parallax. Longit. $21'. 26'', 5$; Latit. ☉ appar. $8'. 23'', 9$

Diam. ☉ appar. $14. 53. 8$; Diff. Long. ☉ et ☉ app. $29'. 45'', 8$.

Primum quidem existimaueram per errorem quendam hoc momentum secus esse assignatum, ac obseruatio id prae-buerat, verum haec rem explicandi ratio non succedit,
quod

quod D^{nus} Poitevin affirmauerit, ipsum calculum ostendere, quod finis Eclipsis versus 17^b. 59ⁱ finiri deberet; id quod tamen nunquam demonstratione firmare poterit. Nec discrepantia calculi ab obseruatione effectui refractionis adscribi poterit, quippe quum tum Parisiis quoque phaenomenon aequae singulare se spectandum praebuisset. Quare nihil aliud remanet, quam vt Astronomi Montis Pessulani, fallacia calculi inducti, incisuram quandam limbi Solaris, ex undulatione ortam, pro indicio Eclipsos habuerint.

De occultatione Aldebaran a Luna Anno 1773,
die 1 Nov. Conferat. Tom. XVIII Comment. pag. 610.

§. 15. Pro obseruationibus huius occultationis, quae mihi innotuerunt, Elementa calculi habentur sequentia.

Phaenom. obseru.	Paral. Longit.	Latit. ☾ apparens.	Diam. ☾ apparens.	Diff. app. in Long.
Gadeti - Immerfio	37'. 34'', 1	5°. 15'. 30'', 0A	14'. 48'', 5	0'. 26'', 5
Emerfio	36. 51, 5	5. 14. 38, 5	14. 49, 4	4. 27, 8
Grenouici Immerfio	25. 11, 8	5. 22. 37, 7	14. 50, 0	13. 33, 0
Emerfio	21. 46, 5	5. 20. 52, 2	14. 51, 9	12. 37, 8
Bruxellis Immerfio	24. 41, 9	5. 21. 23, 5	14. 50, 7	12. 55, 3
Florentiae Immerfio	27. 19, 0	5. 15. 28, 5	14. 52, 2	6. 36, 4
Gryphiswald Immerfio	19. 2, 2	5. 21. 8, 7	14. 52, 0	12. 48, 1
Emerfio	13. 49, 4	5. 19. 37, 5	14. 53, 5	11. 46, 9
Petropoli Emerfio	0. 32, 7	5. 20. 31, 2	14. 54, 0	12. 26, 6

Hinc pro temporibus coniunctionum sequentes prodeunt
expressiones:

$$\begin{aligned}
 \text{pro Gadete} \quad & - 10^b. 7'. 33'' + 4,65\delta + 4,19\gamma + 4,12\pi \text{ (I)} \\
 & 10. 5. 2 - 6,85\delta - 6,54\gamma - 2,65\pi \text{ (II)} \\
 & 2. 31 + 11,50\delta + 10,73\gamma + 6,77\pi = 0 \\
 \text{pro Grenonico} \quad & - 10. 31. 58 + 2,24\delta + 0,93\gamma + 1,82\pi \text{ (I)} \\
 & 10. 31. 32 - 2,40\delta - 1,28\gamma - 0,10\pi \text{ (II)} \\
 & 26 + 4,64\delta + 2,21\gamma + 1,92\pi = 0 \\
 \text{Bruxellis} \quad & - 19. 49. 22 + 2,35\delta + 1,17\gamma + 1,96\pi \text{ (I)} \\
 \text{Florentia} \quad & - 11. 16. 45 + 4,58\delta + 4,10\gamma + 2,88\pi \text{ (II)} \\
 \text{Gryphiswaldia} \quad & 11. 25. 47 + 2,35\delta + 1,18\gamma + 1,59\pi \text{ (I)} \\
 & 11. 25. 8 - 2,58\delta - 1,59\gamma - 0,59\pi \text{ (II)} \\
 & 39 + 4,93\delta + 2,77\gamma + 2,18\pi = 0 \\
 \text{Petropoli} \quad & - 12. 32. 41 - 2,45\delta - 1,36\gamma - 0,93\pi \text{ (II)}
 \end{aligned}$$

§. 16. Si observationes Grenouicenses sumantur pro termino comparationis, observationes Bruxellis, Gryphiswaldiae et Petropoli institutae cum illis facile comparari possunt, etiam si correctiones δ , γ , π plane non habeantur determinatae; verum observationes Gaditanae et illa Florentiae instituta minime cum Grenouicensibus comparari possunt, sine cognitione correctionum δ , γ , π , quippe quum earum coefficientes pro his observationibus sint praegrandes. Facile autem patet ex aequatione pro Gadete inuenta:

$$151 + 11,50\delta - 10,73\gamma + 6,77\pi = 0$$

Latitudinis correctionem proxime statui posse $-10''$, unde ut aequationes paullo exactiores obtineremus, statim huius correctionis usum adhibuimus, sicque momenta pro temporibus coniunctionum sequentia eliciuimus:

pro

pro Gadete	-	(I) 10 ^b . 6'.48'' + 4.90δ + 4.46γ + 4.29 π
		(II) 10. 6. 13 - 7.90δ - 7.63γ - 2.85 π
		35 + 12.80δ + 12.09γ + 7.14 π = 0
Grenouico	(I)	10. 31.49 + 2.24δ + 0.93γ + 1.82 π
	(II)	10. 31.45 - 2.40δ - 1.28γ - 0.10 π
		4 + 4.64δ + 2.21γ + 1.92 π = 0
Gryphiswald.	(I)	11. 25. 35 + 2.35δ + 1.18γ + 1.59 π
	(II)	11. 25. 24 - 2.58δ - 1.59γ - 0.59 π
		9 + 4.93δ + 2.77γ + 2.18 π = 0
Bruxellis	-	(I) 10. 49. 11 + 2.35δ + 1.17γ + 1.96 π
Florentia	-	(I) 11. 16. 2 + 4.83δ + 4.38γ + 3.02 π
Petropoli	-	(II) 12. 32. 55 - 2.45δ - 1.36γ - 0.93 π

§. 17. Nunc quidem si pro obseruatione Gaditana implenda, ponatur $\delta = -2$, $\gamma = -1$ et $\pi = 0$, obseruationibus Gryphiswaldensibus cum praecisione 3 scrupulorum secundorum satisfiet, nec Grenouicensibus maior quam 7 secundor. error inducetur, qui quidem eo minus probabilitate destituitur, quod ipso Cel. *Maskelyne* fatente, emerſio aliquantum dubia fuerit. His igitur adhibitis correctionibus, sequentes prodibunt determinaciones pro momentis coniunctionum et pro differentia Meridianorum

Differentia a Meridiano
Grenouicensi

pro Grenouico	(I)	10 ^b . 31'. 44''		
	(II)	10. 31. 51		
Gadete	-	(I) 10. 6. 34	- -	25'. 10'' Occ.
	(II)	10. 6. 36	- -	25. 15 Occ.
Gryphiswald.	(I)	11. 25. 29	- -	53. 45 Orient.
	(II)	11. 25. 31	- -	53. 40 Orient.

Differentia a Meridiano
Grenouicensi

Bruxellis - (I) $10^b. 49^l. 5''$ - - $17^l. 21^l$ Orient.

Florentia - (I) $11. 15. 48$ - - $44. 4$ Orient.

Petropoli (II) $12. 33. 1$ - - $1^s. 1. 10$ Orient.

Hinc fiunt Longitudines a Meridiano Parisino, differentia Longitudinum inter Meridianum Parisinum et Grenouicensem supposita $9^l. 20''$:

pro Gadete (I) $34^l. 30''$ Occ. Bruxellis (I) $8^l. 1''$ Or.

(II) $34. 35$ Florentia (I) $34. 44$ Or.

Gryphisw. (I) $44. 25$ Or. Petropoli (II) $1^b. 51. 50$ Or.

(II) $44. 20$

Vbi quidem, si correctio pro emersione Grenouicensi 5 scrupulis secundis supponatur dubia, Longitudines ex hac obseruatione deductae, tantundem erunt augendae. Supra ex obseruatione Eclipsis Solis Anno 1769 Gryphiswaldiae instituta eliciuimus Longitudinem huius loci $44^l. 4''$ vel $5''$, quae a iam inuenta $20''$ differt: Nostrum autem non est disquirere, quatenam conclusio potiori loco sit habenda, nisi quod posterior propius accedat ad determinationem Longitudinis pro hoc loco ex Eclipsis Satellitum Iouis, quae tamen, quum supponi soleat $45^l. 10''$, certe nimis est magna, unde nouo argumento comprobatur, quam parum in hoc negotio his Eclipsis sit tribuendum.

§. 18. Nunc etiam multo exactius correctiones Tabularum definire licet, quam id a nobis praestitum est in Tomo XVIII Commentariorum. Incidet enim Tempus coniunctionis Lunae cum α Tauri in tempus Parisinum verum $10^b. 41^l. 5''$, ideoque medium $10^b. 24^l. 52''$, existen-

et

te tunc Longitudine Lunae $2^{\circ} 6' 38'' 3'' 9$, cum Tabulae *Mayeri* pro hoc momento dent Longitudinem Lunae $2^{\circ} 6' 38'' 38'' 7$, unde prodibit correctio pro Longitudine Lunae $35''$ circiter, additiua, Latitudinis correctione $11''$ subtractiua existente; vbi tamen supponitur locum Stellae exacte esse definitum. Conclusio igitur pro loco Lunae ex his calculis deducta eo reducitur, vt contigerit.

Coniunctio Palilicii cum Luna

Anno 1773 die 1 Nou. $10^{\circ} 24' 52''$ Temp. Paris. medio
 existe Longitudine Lunae $2^{\circ} 6' 38'' 3'' 9$
 et Latitudine Lunae Austr. $4^{\circ} 41' 58'' 6$

§. 19. Correctio semidiametri Lunae δ quum a nobis supposita sit $-2''$, merito hoc loco disquiri potest, an quae a variis Auctoribus fortior huius diametri statuatur diminutio, vtpote 4 secundorum cum dimidio, saltem pro hac obseruatione admitti queat? Quodsi igitur pro aequatione Gaditana §. 16 supponeretur $\delta = -4$, fieret $y = +1$; tum vero in aequationem Grenouicensem derivaretur error $13''$ et in Gryphiswaldensem error $9''$. Nec quidem maior consensus, saltem pro obseruatione Grenouicensi prodire poterit, si ipsi π aliqualis tribuatur valor siue positius seu negatiuus, quem tamen sponte intelligitur inter quinque scrupula secunda concludi debere.

§. 20. Praeter obseruationes supra commemoratas, in Commentariis Acad. Scientiarum Parisinae pro Anno 1774, recensentur huius occultationis obseruationes factae Montis Pessulani, vbi perhibetur, occultationem contigisse

rigisse tempore vero $9^b. 16'. 34''$ et emersionem $10^b. 6'. 20''$; verum computo facto ex priori horum momentorum, elicitur Tempus coniunctionis $10^b. 39'. 34''$, quod octo fere minutis primis erroneum est, nec momentum coniunctionis ex obseruato fine elicitum $10^b. 47'. 16''$ rite sibi habere potest. Suspicio igitur mihi oborta est, quod in priori horum momentorum adesse posset error integrorum decem Minut. primorum, in posteriori vero error vnus Minuti primi, ita vt momenta obseruata statui deberent $9^b. 26'. 34''$ et $10^b. 5'. 20''$, ex quibus sequentes prodirent expressiones pro tempore coniunctionis:

$$\begin{aligned} 10^b. 47'. 38'' + 3,16 \delta + 2,42 \gamma + 2,79 \pi \\ 10. 46. 18 - 4,06 \delta - 3,51 \gamma - 0,62 \pi \\ 80 + 7,22 \delta + 5,93 \gamma + 3,41 \pi \end{aligned}$$

aequationi autem resultanti, posito $\delta = -2$ et $\gamma = -11$, optime satisfit. Momenta autem vera pro coniunctione erant: $10^b. 47'. 5''$, ex vtraque obseruatione, vnde fieret Longitudo Montis Pessulani a Meridiano Grenouicensi $15'. 21''$, vel $15'. 14''$, vbi tamen posterior determinatio quinque secundorum correctionem admittere poterit. Quicquid autem sit, hanc hypothesin, vtcunque probabilem, proposuisse suffecerit, donec ipsi Auctores huius obseruationis declarauerint, quid de ista explicandi ratione sit censendum.

De occultatione Aldebaran a Luna

Anno 1774 d. 14 Aprilis. Conferet. Tom. XIX
Comment. pag. 592.

§. 21. Pro obseruationibus calculo subiectis Elementa inuenta sunt sequentia:

Phae-

Phaenom.observ.	Paral. Longit.	Latit. ☉ apparens.	Diam. ☉ apparens.	Different. Lon. app.
Maffiliae Imerſio	38°. 51'', 9	5°. 25'. 5'', 4	14' 56'', 9	14'. 32'', 4
Emerſio	43. 32, 0	5. 28. 10, 2	14. 54, 2	14 57. 4
Gadeti Emerſio	42. 43, 1	5. 20. 26, 3	14. 54, 4	12. 23, 8

Hinc ſequentes pro tempore coniunctionis eliciuntur expreſſiones:

$$\text{Maffiliae (I)} \quad 5^b. 59'. 30'' + 2,08 \delta + 0,52 \gamma - 1,21 \pi$$

$$\text{(II)} \quad 5. 59. 9 - 2,02 \delta - 0,09 \gamma - 1,56 \pi$$

$$21 + 4,10 \delta + 0,61 \gamma + 0,35 \pi = 0$$

$$\text{Gadeti (II)} \quad 5^b. 12. 19 - 2,44 \delta - 1,37 \gamma - 2,04 \pi$$

Hinc primum quidem liquet, pro aequatione ex obſervationibus Maſſilienſibus deducta, valores correctionum δ et γ in Tomo XIX. Comment. ſtabilitos, adprime ſatisfacere; nam ſi ponatur $\delta = -3$, $\gamma = -14$, haec aequatio perfecte implebitur, eritque momentum coniunctionis pro Maſſilia $5^b. 59'. 16''$; vnde quum pro Meridiano obſervatorii Pariſienſis momentum coniunctionis $5^b. 47'. 12''$ inveniſſemus, erit differentia Meridianorum inter obſervatorium Pariſienſe et Maſſiliam $12' 4''$. Pro obſervatione vero Gaditana, ſi valores commemorati ſubſtituantur, erit momentum coniunctionis: $5^b. 12'. 45''$, vnde fiet differentia Meridianorum inter Gadetem et obſervatorium Pariſiſum $34'. 27''$, quae cum ſupra §. 20 inuentis bene conſentit. Idem vero proxime inuenietur, ſi obſervatio Cel. Meſſier pro emerſione comparetur cum illa Gadeti facta: erit enim

pro Gadete moment. conj. $5^b. 12'. 19'' - 2,44\delta - 1,37\gamma - 2,04\pi$
 pro obseruat. Parisino $5. 47. 11 - 2\ 05\delta + 0,39\gamma - 1,24\pi$
 hinc differentia Meridian. $34\ 52 + 0,39\delta + 1,76\gamma + 0,80\pi$,
 quae positis $\delta = -3$, $\gamma = -14$, $\pi = 0$, abit in $34'. 26''$.

Praeter commemoratas obseruationes innotuit quoque mihi de emerfione huius Stellae Bruxellis obseruata; verum quum ex hac obseruatione Longitudo huius loci prodeat valde erronea, suspicor momentum, quod ex Transactionibus Societatis Londinensis excerpti, esse erroneum; idque eo magis, quod Cl. *Mechain* affirmauerit, se ex hac obseruatione inuenisse Longitudinem pro Bruxellis $8'. 13''$, seu satis bene sibi constantem.

De occultatione γ Tauri a Luna, die 24 Sept. 1774.
 Conferat. Tom. XIX Comment. pag. 599.

§. 22. Elementa calculi pro obseruatione Gadeti instituta sequentia habentur: Pro immersione: Paral. Long. $23'. 59'', 1$; Latit. \odot appar. $5^\circ. 35'. 24'', 1$; Diam. \odot appar. $15'. 6'', 6$; Differentia Longitud. apparens $11'. 30'', 7$. Pro emerfione: Paral. Longit. $13'. 17'', 0$; Latit. \odot apparens $5^\circ. 33'. 35'', 2$; Diamet. \odot apparens $15'. 13'', 3$; Differ. apparens Longitud. $9'. 49'', 5$. Hinc sequentes colliguntur expressiones pro tempore coniunctionis:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 14^b. 35'. 1'' + 2,60\delta + 1,09\gamma + 1,63\pi \\ \text{(II)} \quad & 14. 34. 7 - 3,07\delta - 2,36\gamma - 0,54\pi \\ & 54 + 5,67\delta + 4,15\gamma + 2,17\pi = 0 \end{aligned}$$

Pro Parisiis erat:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 15. 9. 9 + 2,00\delta + 0,28\gamma + 0,47\pi \\ \text{(II)} \quad & 15. 8. 54 - 2,07\delta - 0,64\gamma - 0,46\pi \\ & 15 + 4,07\delta + 0,92\gamma + 0,93\pi = 0 \end{aligned}$$

Heic

Heic si ponatur $\delta = -2$, $y = -11$, $\pi = 0$, vtrique obseruationi satis bene satisfit. Tum vero erit pro Gadete:

Diff. Meridian.

Momentum coniunctionis	14 ^b . 34'. 37" (I)		
	14. 34. 39 (II)		
et pro obseruat. Parisino	15. 9. 0 (I)	.	34'. 23"
	15. 9. 3 (II)	.	34. 24

In caeteris pro hac occultatione conclusionibus, vt aliquid immutetur, necesse non est.

De occultatione Palilicii a Luna, die 18 Nou. 1774.

Conferat. Tom. XIX Comment. pag. 600.

§. 23. Pro Emerfione Palilicii, Grenouici obseruata, sequentia habentur Elementa calculi: Paral. Longit. 34'. 25"; Latit. \odot apparens 5°. 30'. 39", 6; Diamet. \odot apparens 15'. 4", 7; Differentia Longitudinum apparens 15'. 1", 8. Hinc colligitur tempus coniunctionis pro Grenouico:

$$14^b. 57'. 33'' - 1, 99 \delta + 0, 21 y - 1, 36 \pi.$$

Pro Immerfione, Gadeti obseruata, Elementa calculi sunt: Paral. Longit. 30'. 24", 6; Lat. \odot apparens 5°. 16'. 30", 5; Diamet. \odot appar. 15'. 8", 1; Differentia Longit. apparens 7'. 31", 4, hinc tempus coniunctionis:

$$14^b. 32'. 39'' + 3, 40 \delta + 2, 78 y - 1, 93 \pi.$$

Pro eruendis valoribus correctionum aliud heic non suppetit remedium, quam quod conclusio ex Emerfione Grenouici deducta reducatur ad Meridianum Parisinum, et cum conclusione ex immerfione Parisiis obseruata confe-

ratur. Est igitur pro Meridiano Parisino, ex obseruatione Grenouicensi, momentum coniunctionis:

$$15^b. 6'. 53'' - 1,99 \delta + 0,21 \gamma - 1,36 \pi,$$

ex obseruatione autem Cel. *Messier*, pro immersione, idem conclusum est

$$15. 6. 27 + 1,98 \delta + 0,19 \gamma - 1,60 \pi,$$

unde colligeretur aequatio

$$26 - 3,97 \delta + 0,02 \gamma - 0,36 \pi = 0,$$

quae sane subsistere nequit, quum valorem omnino positivum eumque valde insignem pro δ praebeat, omnibus hucusque obseruationibus refragantibus. Eo potiori igitur iure contendimus, hanc Cel. *Messier* obseruationem rite sibi constare non posse, quod Cel. *Monnier* eandem immersionem $15^b. 35'. 32''$ obseruauerit, ideoque 25 secundis tardius, quam Cel. *Messier*, habita ratione differentiae Meridianorum inter obseruatoria Celeberrimorum horum Astronomorum. Si igitur vsus fiat obseruationis a Celeb. *Monnier* institutae, prodibit aequatio.

$$1 - 3,97 \delta + 0,02 \gamma - 0,36 \pi = 0,$$

quae quidem nec prorsus exacta videtur, interim tamen non adeo graua absurda perducit, ac prior illa. Et si supponamus emersionem Grenouici iusto tardius esse obseruatam, vtpote sex vel septem secundis, haec aequatio absurdi nil inuoluet. Caeterum nec ex hac postrema aequatione de valore ipsius γ quidquam concludi potest; igitur pro hac correctione saltem proxime inuenienda, reducamus conclusiones, ex obseruatione Petropolitana et Gaditana deductas, ad Meridianum Parisinum, sicque habebimus has expressiones pro tempore coniunctionis:

$$15^b. 7'. 7'' + 3,40 \delta + 2,78 y - 1,93 \pi,$$

$$15. 6. 51 + 2,53 \delta - 1,59 y + 0,09 \pi, \text{ hinc}$$

$$16 + 0,87 \delta + 4,37 y - 2,02 \pi = 0,$$

ubi si ponatur

$\delta = -2$, $\pi = 0$, fiet $y = -3''.13$. Tumque habebimus momenta coniunctionum

Differ. Meridian.

pro Grenouico ex Emerfione $14^b. 57'. 36''$

pro Gadete ex Immerf. $14. 32. 23 - 25'. 13''$ Oc.

Petropoli ex Immerf. $16. 58. 48 - 2. 1. 12$ Or.

obfervatio vero Cel. *Monnier* dabit tempus coniunctionis, $15^b. 6'. 47''$. Hinc inter Gadetem et obfervatorium Parifinum differentia Meridianorum erit $34'. 24''$, inter obfervatoria autem Petropolitenum et Parifinum $1^b. 52'. 1''$, quae certe aliquot fecundis iufto maior eft. Quae autem heic attulimus tantum hypothetice vera funt, fi correptiones δ , y rite a nobis fuerint definitae, de quo occasio forfan dabitur ulterius difquirendi, dum plures huius occultationis obfervationes nobis innotuerint.

§. 24. Antequam hic Differtationi finem imponamus, nonnullas animadverfiones circa rationem determinandi Longitudines locorum ex obfervationibus circa Eclipses Solis et occultationes fixarum a Luna adiiciemus. Primum igitur ex fpeciminibus iam allatis, vti et multis aliis calculis pro hoc instituto factis, fatis patere arbitror, vix ullam dari rationem certiore, determinandi Longitudines locorum, quam hanc, et fi quae incertitudo conclusionibus ex illa deductis nonnunquam adhaerere videtur, illam qua potiore partem ex defectu obfervati-

num esse deriuandam. Si conclusiones pro Longitudine obseruatorii Gaditani supra allatas inter se conferamus, vix maiorem consensum expectare licebit; est enim:

Different. Meridianorum inter Obseru. Parisin. et Gaditan.

Ex Eclipsi Solis 1769. - - - - $0^b. 34^l. 40''$ Oc.

Ex Occultatione Palilicii 1773 d. 1 Nou. o. 34. 30 (I)

o. 34. 35 (II)

Ex Occultatione Palilicii 1774 d. 14 Apr. o. 34. 26 (II)

Ex Occultat. γ Tauri 1774 die 24 Sept. $0^b. 34^l. 23$ (I)

o. 34. 24 (II)

Ex Occultat. Palilicii 1775 d. 18 Nou. o. 34. 24 (I)

Hinc medio inter septem has determinaciones sumto: $34^l. 29''$ Occid., quod tamen medium forsan correctionem duorum, aut trium secundorum diminutionem, admittere poterit. Quod autem conclusio ex Eclipsi Solis deducta a reliquis plus iusto discrepet, id quidem nemini mirum esse poterit, qui nouerit, inter momenta, pro fine Eclipsis Solis in eodem loco, adducta, nonnunquam discrepantias 15 scrupulorum secundorum reperiri, pro diuersa oculorum et instrumentorum vi. Caeterum tam pro his obseruationibus, quam illis, quae circa occultationes fixarum a Luna instituuntur, errores, in determinando tempore vero commissi, ipsas obseruationes erroneas reddunt; huiusmodi autem errores committi posse, et saepe commissos esse pluribus exemplis confirmari potest. Vnicum autem hanc in rem exemplum sufficere poterit:

1774 d. 14 April. Immersio α Tauri ad Meridian. obseruat. Parisini reducta, ex obseruatione

Cel. *Messier* 6^b. 26^l. 2^{ll}

Cel. *Cassini* 6. 26. 2

Cel. *Anthelmi* 6. 26. 2

Cel. *Mechain* 6. 25. 52.

Haec exacte consentiunt, excepta obseruatione D. *Mechain*.
Eodem die Emerſio α Tauri ad Merid. obseruat. Parisini:

ex obseruatione D. *Messier* 7^b. 35^l. 57^{ll}

Cassini 7. 35 58

Anthelmi 7. 36. I

Mechain 7. 36. I

Du Séjour 7. 35. 55

Le Monnier 7. 36. II.

§ 25. Inter alia dubia, quae contra Methodum determinandi Longitudines locorum ex obseruationibus huius generis, proponi potest, etiam illud est, quod de Diametris Solis et Lunae probabile sit, eas siue per inflexionem radiorum luminis, siue per quandam irradiationem diminui, quare nullae certae conclusiones expectari possunt, antequam haec diminutio exacte definiatur. Huic incommodo remedium vt adferatur, quidam Mathematici hanc diminutionem determinare annisi sunt, inter quos praecipue mihi nominandi sunt Cel. *Du Séjour* et Cel. *de La Lande*, quorum prior contendit inflexionem radiorum luminis ad marginem Lunae esse 4 secund. cum dimidio, posterior autem perhibet pro explicandis phaenomenis transitus Veneris, diametrum Solis 7^{ll} esse diminuendam. Verum etiamsi non negauerim, tam pro Eclipsibus Solaribus, quam occultationibus fixarum, diametrum Lunae diminutionem quandam pati, tamen plerisque in casibus haec dimi-

minutio vix 3 scrupula secunda excedit, ideoque mensura a Cel. *Du Séjour* stabilita iusto maior videtur. Quod autem diminutionem diametri Solaris a Celeb. *de la Lande* stabilitam attinet, argumentis exceptione maioribus demonstrare valeo, eandem nequaquam locum habere posse. Tanto magis igitur falsum est, quod contendit Abbas Reggion in Ephemeridibus Astronomicis pro Anno 1776 Mediolani euulgatis, diametrum tam Solis quam Lunae 6'' esse diminuendam, quod exemplo Eclipsis Solaris, Anno 1769 observatae, comprobare conatur. Si enim in aequationibus nostris, supra §. 4. allatis, praecipue Gurjeswensi ponatur $\delta = -6$, quia ex aequatione Parisina esse deberet $y = -20''$, posito $\pi = -3$, in istam aequationem Gurjeswensem error deriuaretur circiter 41'', quem absurdum esse facile quivis largietur. Ponamus autem esse $\pi = 0$, fietque per aequationem Parisinam $y = -18''$, et in aequatione Gurjeswensi erit error 34''. Porro si etiam ipsi π tribuatur valor positivus 3'', ut sit y ex aequatione Parisina $= -16''$, et in aequatione Gurjeswensi adhuc remanebit error 28''. Hinc igitur evidenter, ut puto Geometrica, demonstratum est, istam correctionem 6 vel 7 secundorum, pro semidiametris Solis et Lunae omni destitui fundamento. Idem vero insuper patet ex observatione Jakutensi, in quam error saltem 12'' ex his valoribus deriuaretur. Caeterum differentia Meridianorum inter Mediolanum et Lutetias Parisiorum habetur:

$$27'. 27'' - 0, 39 \delta + 0, 57. y - 0, 22 \pi$$

vbi ob exiguos coefficientes ipsorum δ , y , facile eiusmodi valor pro y feligi potest, ut prodeat differentia Meridianorum, 27'. 25'', quo tamen nihil demonstratur pro exactitudine correctionis δ .

§. 26. Ultimo autem loco obseruasse iuuat, fieri utique posse, vt haec correctio δ pro variis locis diuersa sit; nam in his disquisitionibus supponi solet, imagines Solis et Lunae circularem habere figuram, quod tamen, saltem pro imagine Solis, aliquantum a veritate abludere, per mensuras Micrometro obiectiuo institutas, se inuenisse nonnulli Astronomi contendunt; nec verisimilitudine destituitur, idem pro Luna obtinere. Quare si obseruationes inter se conferantur, pro quibus Latitudines Lunae apparentes discrepantiam inter se insignem habeant, tum utique fieri potest, vt phaenomenon circa valde diuersa imaginis Solaris et Lunaris puncta obseruetur, vnde diametrorum aestimatio pro utroque loco non esse potest eadem. Quum vero huius discrepantiae rationem in calculo vix a ne vix quidem habere liceat, saltem quousque experimentis exactissimis non fuerit definitum, secundum quam rationem diametri Solis vel Lunae variationem patiantur; consueta Methodo haec Phaenomena computo subiicere praestabit, saltem si licuerit earum praecipue obseruationum comparisonem instituere, pro quibus Latitudo Lunae apparens non insigni variatione afficiatur, ita vt phaenomenon ad puncta haud multum inter se distantia limbi Lunae contigerit.

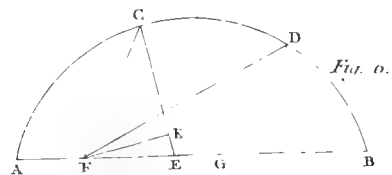
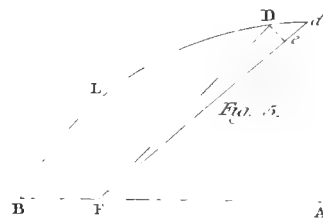
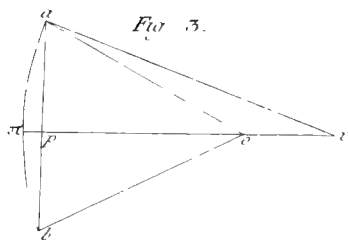
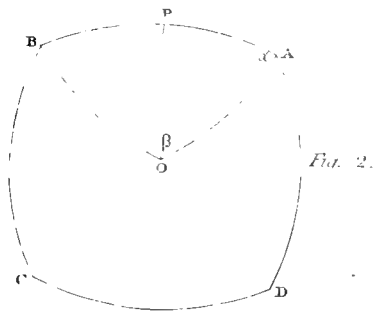
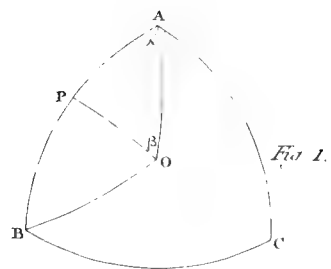


Fig. 2

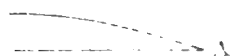


Fig. 3



Fig. 4

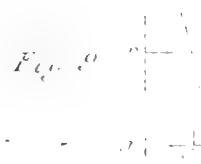
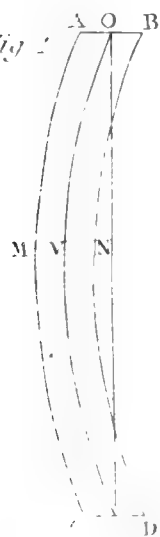
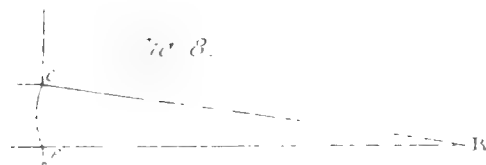
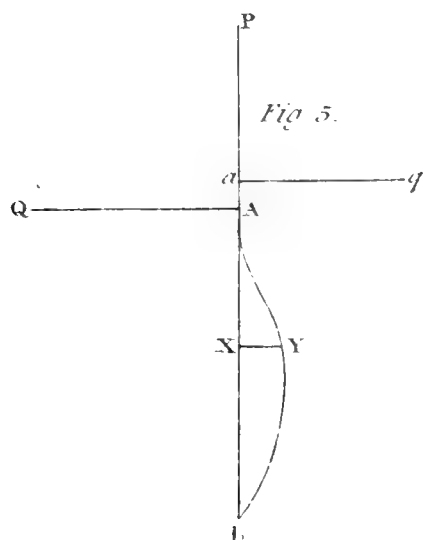
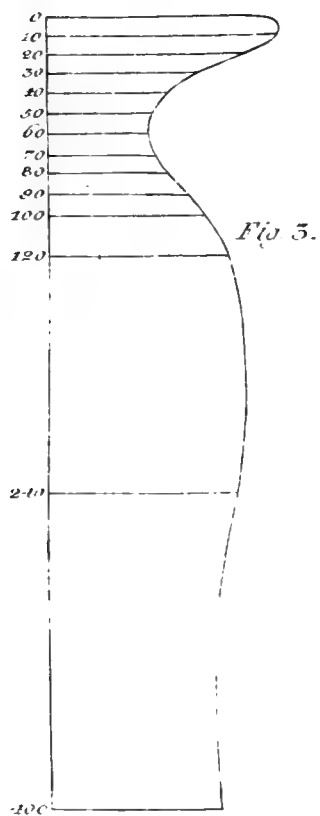
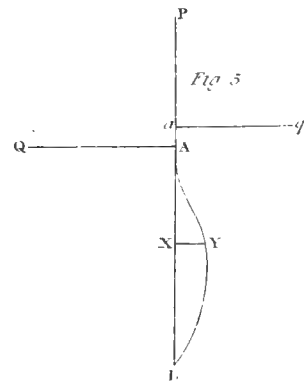
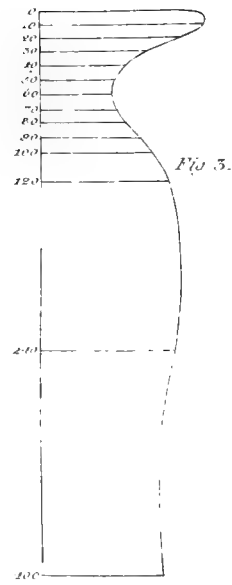
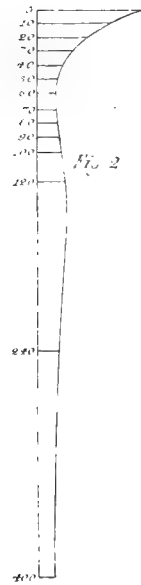


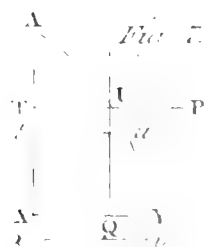
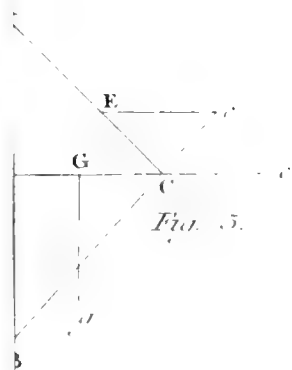
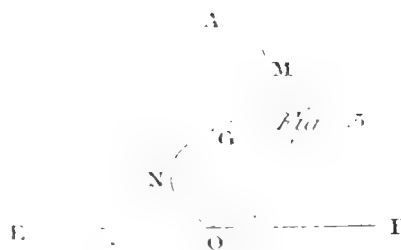
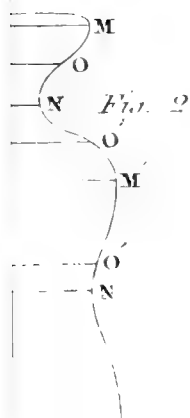
Fig. 5



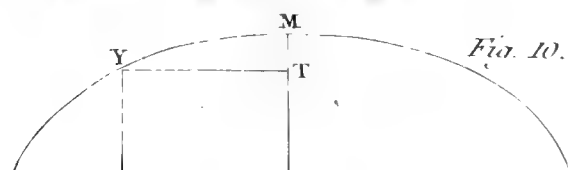
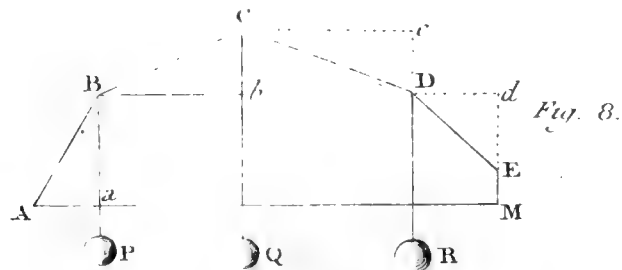
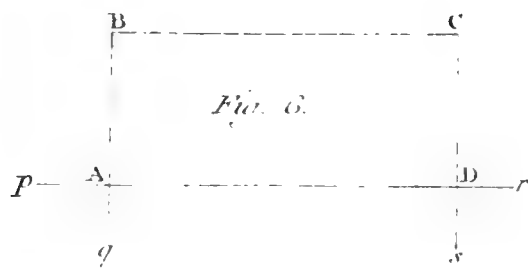
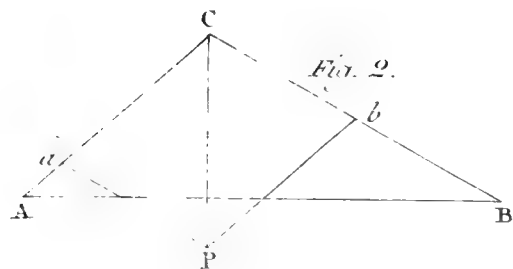












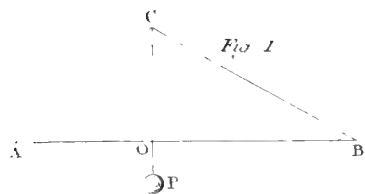


Fig. 1

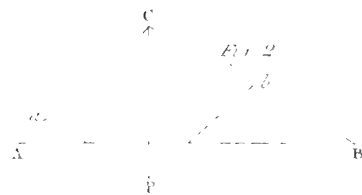


Fig. 2



Fig. 3

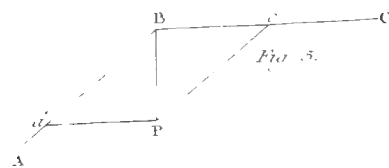
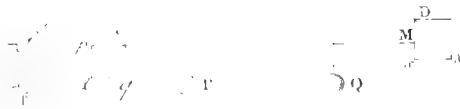
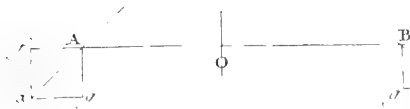


Fig. 6



Fig. 7

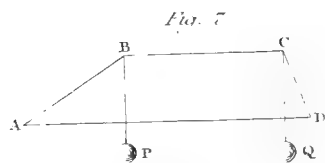


Fig. 9



Fig. 10

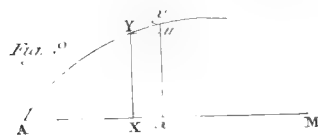


Fig. 11



Fig. 12



Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 5.

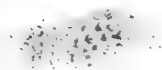




Fig. 1.

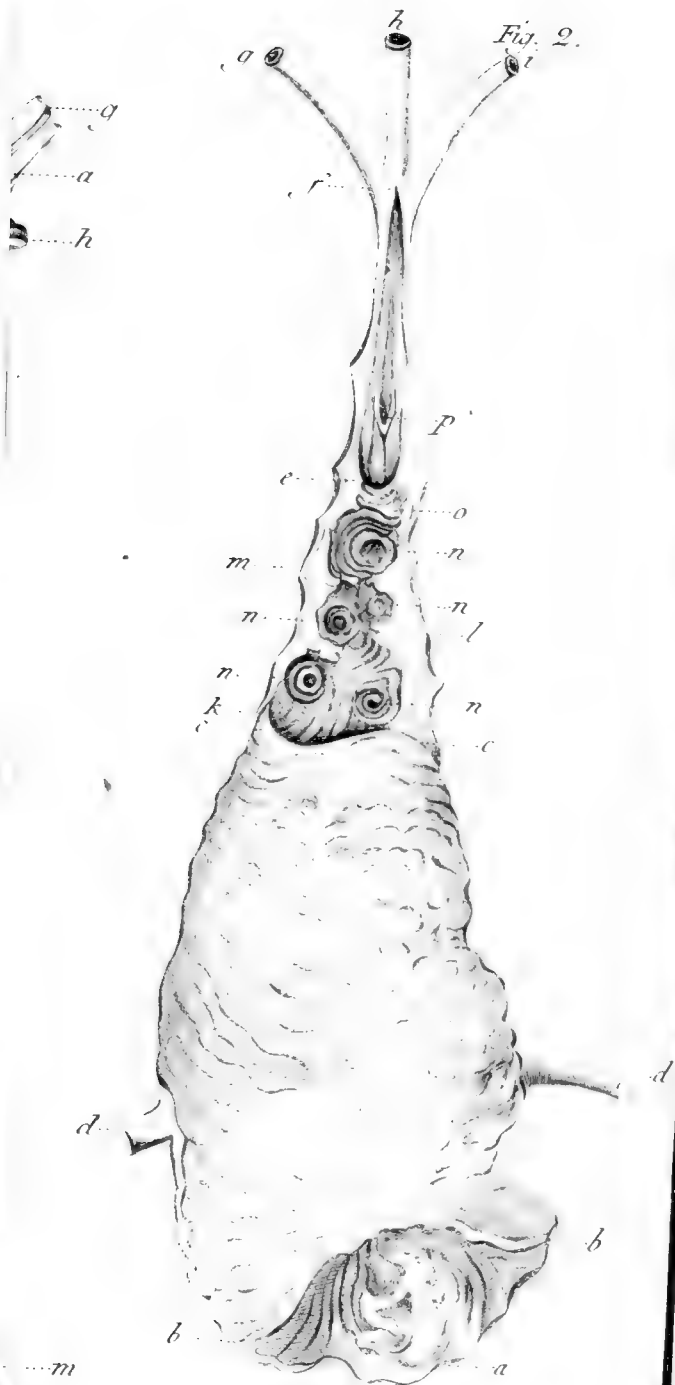


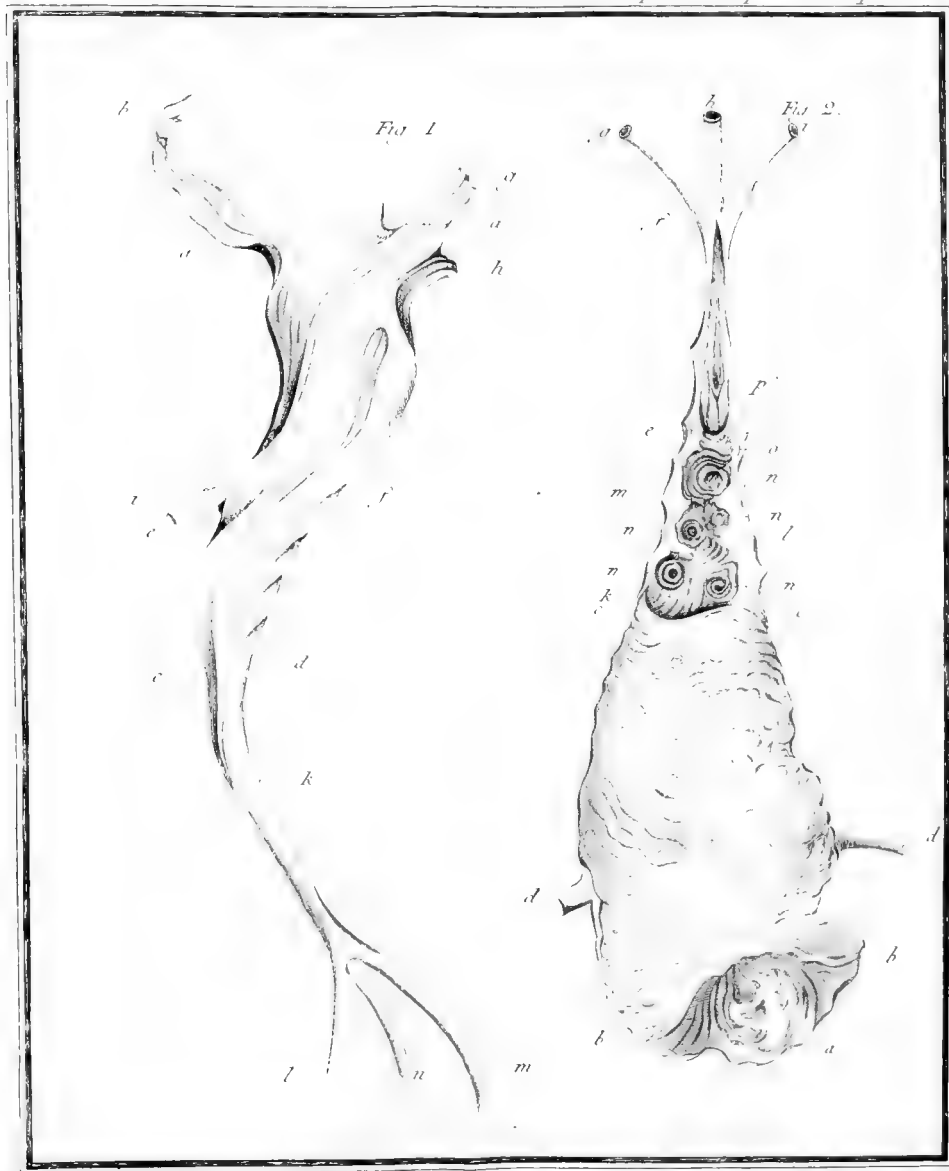
Fig. 2.



Fig. 3.







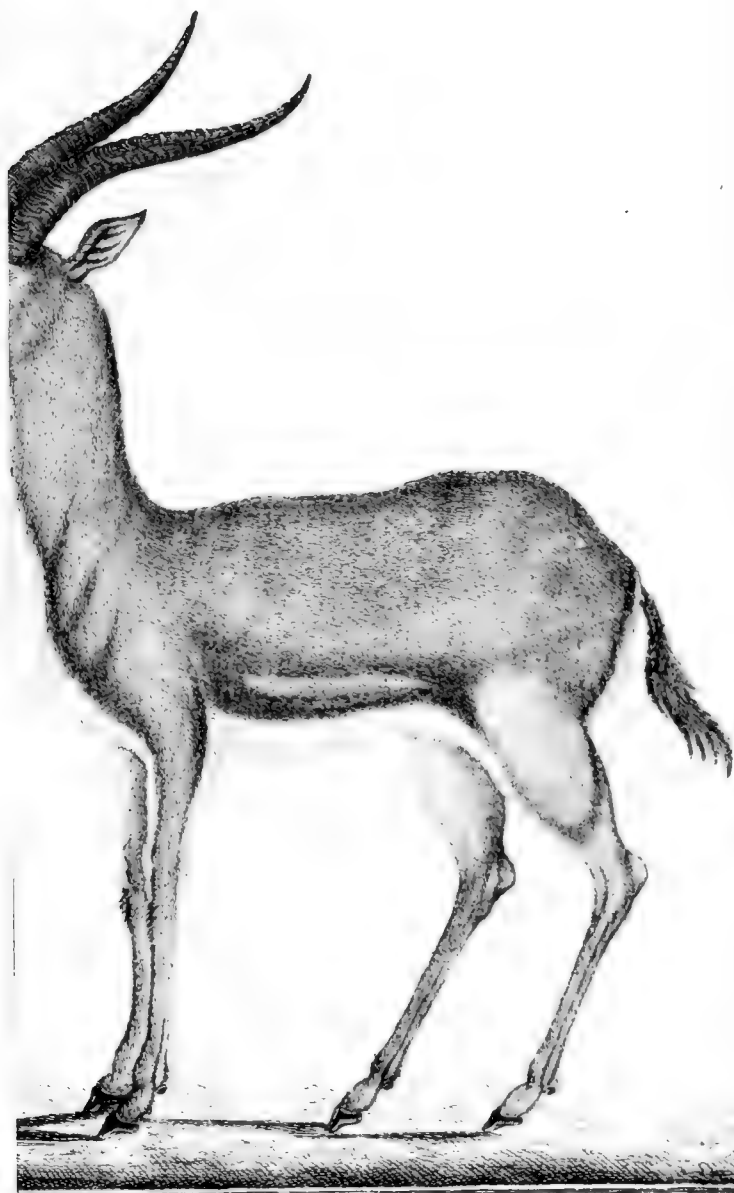










Fig. 4.

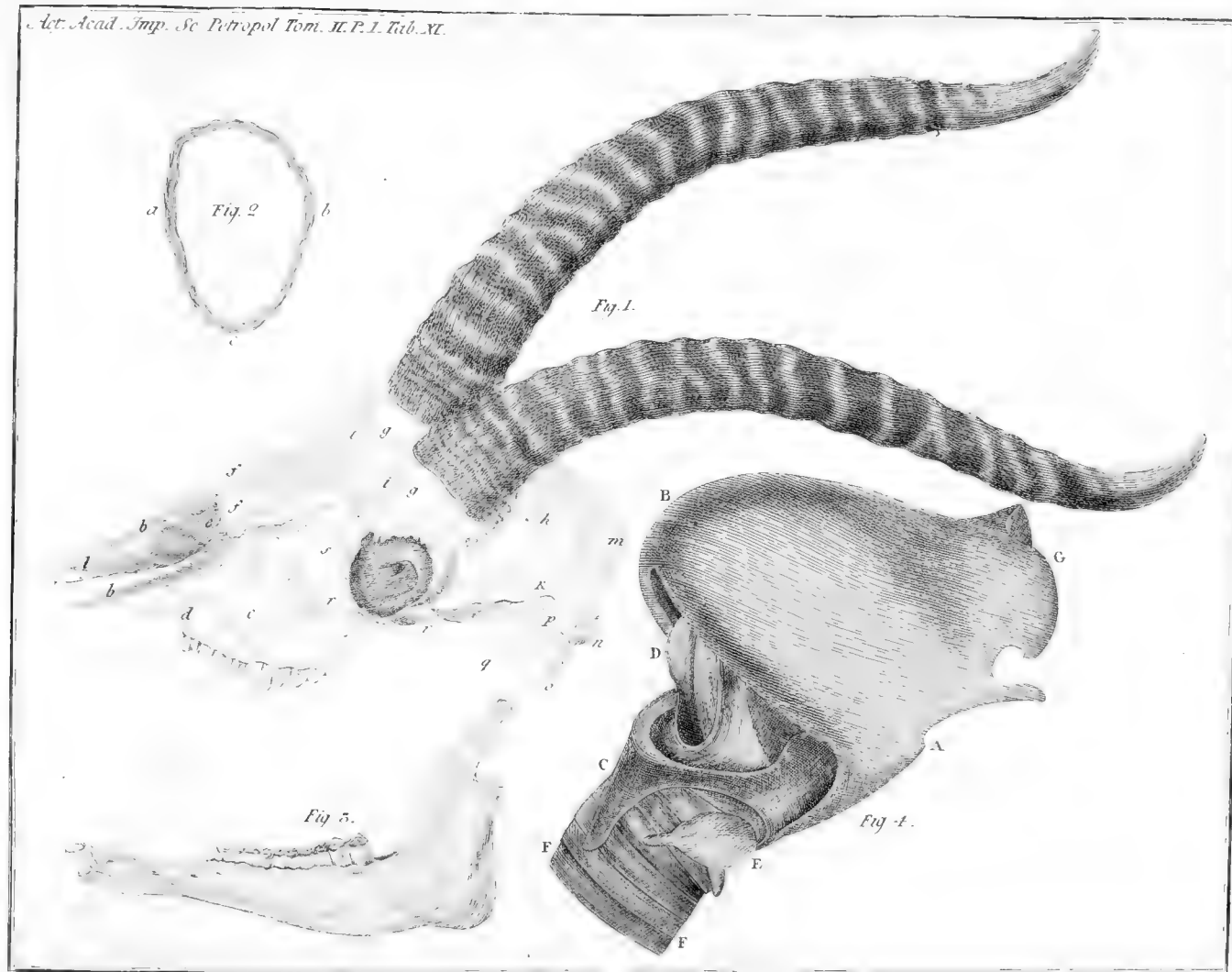
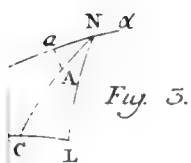
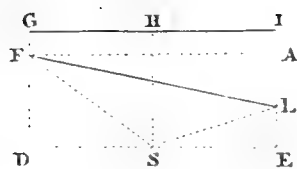
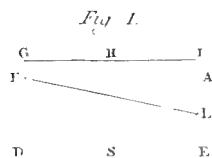
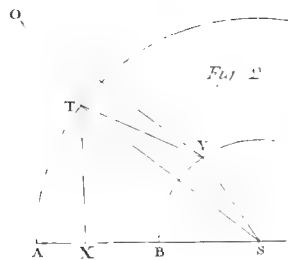






Fig. 1.





AMNH LIBRARY



100125007